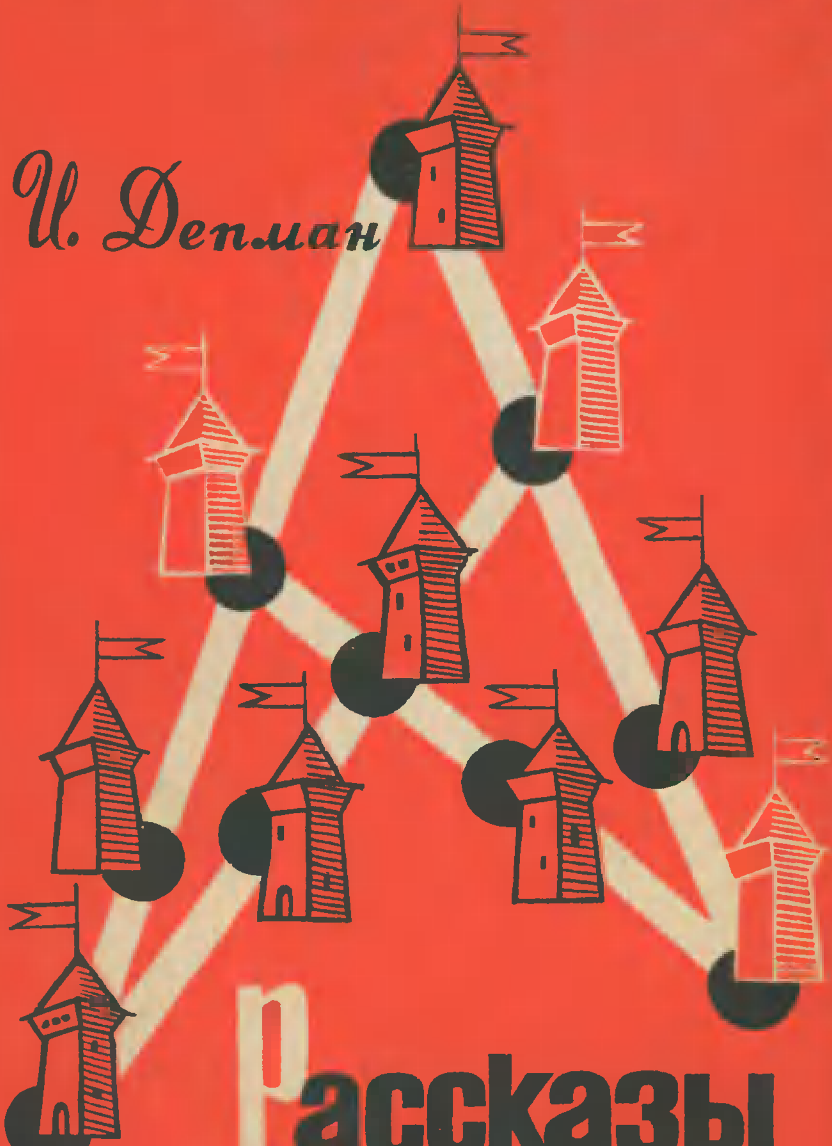
И. Депман



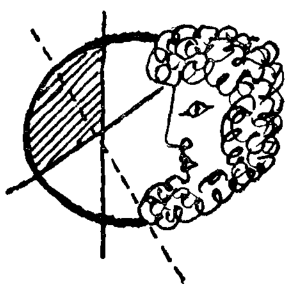
Рассказы о решении задач

Издательство «Детская литература»

ШКОЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА

И. ДЕПМАН

Рассказы о решении задач



Издательство „Детская литература"
Ленинград 1964

51
Д 35

2-е, дополненное и переработанное, издаиие

Рисунки Ю. Смольникова

Оформление Э. Бордзиловской

Эта книга для любознательных и упорных. Вы найдете в ней много разнообразных математических задач и интересные, остроумные их решения. Прочитав книгу И. Я. Депмана и поломав голову над задачами, вы по-настоящему поймете, какая могучая и всепроникающая наука — математика.

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Депман Иван Яковлевич

РАССКАЗЫ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Ответственный редактор Н. К. Неуймина. Художник-редактор В. В. Куприянов. Технический редактор П. Л. Трусова. Корректоры Л. К. Малявко и К. Д. Немковская.

Подписано к набору 23/XII 1963 г. Подписано к печати 10/VI 1964 г. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 4,75. Усл. печ. л. 7,79. Уч.-изд. л. 6,47. Тираж 100 000 (1—50 000) экз. ТП-1964 № 558. М-21625. Ленинградское отделение издательства „Детская литература". Ленинград, Д-187, наб. Кутузова, 6. Заказ № 244.

Фабрика детской книги № 2. Ленинград, 2-я Советская, 7. Цена 29 коп.

ВВЕДЕНИЕ

Математика в наше время получила небывало широкое применение. Не только все точные науки и техника пользуются ею на каждом шагу, но методы математики вошли и в экономические и языковедческие науки. Все науки пользуются электронными вычислительными машинами, которые созданы на основании новых разделов математики.

Письменные памятники американского народа майя, которые в течение столетий оставались недоступными науке, прочтены советскими математиками в Новосибирске.

Помните слова Михаила Ивановича Калинина:

„Какую бы науку вы ни изучали, в какой бы вуз ни поступали, в какой бы области ни работали, если вы хотите оставить там какой-нибудь след, то для этого везде необходимо знание математики... И потому, если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой...“

Математика необходима не только как вспомогательное орудие при изучении любой другой науки. Современный человек должен понимать мир, в котором он живет. Уже несколько столетий назад великий ученый сказал: „Книга природы написана на математическом языке...“

Математика является школою мышления.

Великий Ломоносов двести лет назад сказал: „Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит“.

П.Л.Чебышев

Основою всей математики является школьная математика. Хорошее усвоение ее есть основа изучения большой математики. А для этого надо прежде всего научиться решать задачи. Наша книга и стремится помочь читателю в этом.

Читатель не должен ожидать, что наша маленькая книга научит его решать всякие задачи, которые будут встречаться в арифметике и начальных разделах геометрии и алгебры, изучаемых в 5—7-х классах. Умение решать разные задачи, остроумие, необходимое для этого, приобретается только продолжительной практикой.

Мы не случайно говорим об остроумии. Очень часто простые на первый взгляд вопросы требуют при решении именно большого остроумия. В этом отношении замечательнейшие примеры представляет арифметика целых чисел, которая изучается в 4—6-х классах школы.

В арифметике целых чисел известны, на первый взгляд, очевидные утверждения, для которых наука до сих пор не имеет доказательств, хотя этих доказательств искали крупнейшие ученые в течение ряда столетий. Величайшие русские математики Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) и Иван Матвеевич Виноградов (родился в 1891 году) приобрели мировую славу решением вопросов арифметики целых чисел.

Мы надеемся, что читатель этой книги не будет стремиться только запомнить излагаемое. Он не должен подражать Евгению Онегину, про которого Пушкин говорил:

„Уселся он с похвальной целью
Себе присвоить *ум чужой*“.

И.М.Виноградов

Надо пытаться каждую задачу решить самостоятельно, и только если это не удается, читать данное в книге объяснение, чтобы применить усвоенный ход рассуждений к решению других задач. Усвоив решение задачи по книге, попытайтесь найти и свой способ решения. Он будет для вас всегда самым понятным, а иногда может оказаться и новым, до этого неизвестным в науке. Итак, научить кого-либо быстро решать всякие задачи нельзя, но научиться решать их можно. Для этого нужны настойчивость в самостоятельном преодолении кажущихся трудностей и трудолюбие.

Поучительно послушать рассказ старого писателя Н. Н. Златовратского о том, как он стал понимать математику, которая ему вначале плохо давалась. Отец Златовратского, получая от школьного начальства все время сообщения о том, что сын его не успевает в математике, попросил учителя математики другой школы города заняться с мальчиком. Вот о последующем рассказывает Златовратский:

„Принял С. (учитель, к которому направлен был мальчик) меня хотя и с обычною суровостью, но „по-семейному“, и, нисколько не интересуясь, знаю ли я что-нибудь по его предмету и как, он без всяких предисловий приступил к ознакомлению меня с самыми элементарными основами математики, как будто я никогда не учился в школе и не сидел в ней уже четыре года. Протестовать я, конечно, не решался. Он прямо начал объяснять мне совершенно просто, „по-человечески“, именно по-человечески, нумерацию и затем шаг за шагом все те необыкновенно просто и логически вытекающие одно из другого действия, которые мне казались раньше чуть ли не кабалистикой (загадочным, волшебным)... Урок, другой, третий — и я каждый раз стал уходить от него как будто все более и более духовно окрыленным. Прошло два месяца, и я уже был осиян настоящим откровением. Господи, да неужели же я не идиот, не тупица, как уже начинали говорить обо мне мудрые гимназические (гимназия — средняя школа старого времени. — *И. Д.*) педагоги?.. С. был, по-видимому, мною тоже доволен, но он не показывал и вида, он даже не интересовался тем, за что и почему я получал двойки и единицы; у него я уже свободно решал довольно сложные задачи по арифметике и геометрии... По прошествии двух месяцев С. сказал отцу коротко: „Будет, довольно... Больше сыну ко мне ходить незачем пока... Пусть

М. Третьяков

готовится к экзамену...“ Экзамен я выдержал, получив по математике „удовлетворительно“, к изумлению нашего педагога, не решавшегося мне еще поставить лучший балл“*.

Златовратский сообщает, что в дальнейшем, как в средней, так и в высшей школе, он считался „математиком“.

Автор книги с большой теплотою и благодарностью вспоминает двух своих учителей, которым он главным образом обязан тем, что стал преподавателем математики.

Первым из них является **Михаил Константинович Третьяков,** учитель Юрьевской (Тарту, Эстонская ССР) учительской семинарии, отец советского поэта Сергея Третьякова. Встречи с этим долгоногим парнем в школьные годы, совместные игры и битвы, победы и поражения, которыми они нередко кончались, мною вспоминаются так же тепло, как уроки его отца, пробудившие во мне любовь к учительскому труду, к обучению математике. Я помещаю здесь портрет Михаила Константиновича Третьякова не потому, что труды его являются заслуживающими внимания теперешнего читателя. Но если вы уловите мою мысль и так же тепло отнесетесь к своим учителям, то доставите и мне радость.

В минуту писания этих строк подают газету, и в ней читаю:

„Какой здоровый организм наша школа! Как самоотверженно, как вдохновенно работают в ней великолепные люди, учителя“.

В. В. Лермантов

Это сказано про твою школу, юный читатель!

Другим моим наставником, направлявшим ум, был лаборант Петербургского университета **Владимир Владимирович Лермантов** (1845—1918), близкий родственник великого поэта,

* Н. Н. Златовратский. Воспоминания. 1956, стр. 71.

автор оригинальных книг „Курс применимой алгебры“ и „Применимая геометрия, основанная на опыте“. Владимир Владимирович часто, всерьез и в шутку, внушал нам не походить на описанного Гоголем Петрушку, который любил чтение не за содержание читаемого, а за то, что „из букв вечно выходят слова, которые иной раз черт знает что и значат“.


А.Н.Крылов

Подражая названным и не названным своим учителям, автор книги хотел бы через нее привить юным читателям **привычку думать.** Для понимания излагаемых в книге задач, кажущихся на первый взгляд трудными, нужны не большие знания в математике, а только привычка думать.

В этой книге математические сведения излагаются в виде рассказов — „просто“, — как делал учитель Златовратского, без стремления подражать принятым в учебниках способам и языку.


И.Ньютон

Известный русский генерал Драгомиров, мастер военной педагогики и психологии, говорил: „Учи не только рассказом, а больше показом“. Эти слова много раз повторял крупнейший инженер и математик, академик А. Н. Крылов (1863—1945).

Величайший математик Ньютон (1643—1727) внушал: „Примеры поучают больше, чем теория“.

Не надо смущаться тем, что не все читаемое сразу ясно и понятно. Головы людей работают различно. Одни схватывают новое легко и сразу, но при этом часто поверхностно, другие усваивают новое медленно, но глубоко.


Д.Гильберт

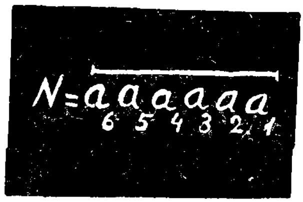
Про величайшего математика XX века Давида Гильберта (1862—1943) рассказывают, что он усваивал новые идеи очень медленно, зато когда он их усвоил, то никто не мог сравниться с ним в использовании и дальнейшем развитии их.

Чтение математической книги, в том числе и нашей, не забава. Такую книгу надо читать с карандашом в руке, повторяя излагаемые выкладки, потому что каждое новое предложение здесь опирается на предыдущие. При чтении нового материала не все понятия сразу усваиваются. Это затрудняет понимание дальнейшего. Приходится возвращаться к предыдущему, и так иногда по нескольку раз. Если это с вами произойдет, то не спешите, как вначале склонен был делать мальчик Златовратский, зачислять себя в тупицы, а упорно продолжайте попытки решения.

Понимание придет.

РАССКАЗ ПЕРВЫЙ

о том, что происходило в одной из ленинградских школ на уроке в 1956 году при решении задачи



Найти шестизначное число:

$$N = \overline{a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1},$$

которое при умножении его на 2, 3, 4, 5, 6 дает также шестизначные числа, написанные теми же цифрами, только в другом порядке.

Примечание. Символом $\overline{a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1}$ принято обозначать число, у которого на первом месте справа стоит цифра a_1, на втором месте цифра a_2, на третьем месте цифра a_3, и так далее. Иными словами, в этом числе a_1 единиц, a_2 десятков, a_3 сотен, a_4 тысяч, a_5 десятков тысяч, a_6 сотен тысяч.

Раньше чем продолжать чтение, попытайтесь самостоятельно найти решение задачи. Если это не удастся, читайте беседу автора книги (учителя) с учениками VII класса при решении этой задачи.

Учитель. Скажите, сколько вы за годы учения в школе решили задач?

Ученик *(после некоторого молчания)*. Не считали... Вообще много.

Учитель. Много? Тысяча будет?

Ученик. Возможно, что будет.

Учитель. Как вы думаете, зачем вас заставляют столько задач решать?

Ученик *(после некоторого раздумья)*. Чтобы закрепить теорию.

Учитель. А зачем заставляют изучать теорию?

Ученик. Чтобы решать задачи.

Учитель. Итак, теория — для решения задач, задачи — для закрепления теории.

(Смех в классе.)

Не похоже ли это на рассказ о том, что где-то в океане существует остров, жители которого занимаются только тем, что стирают друг другу белье.

(Смех.)

Ученик. Математика нужна на практике; нужно уметь решать задачи, которые ставит физика, химия, производство.

Учитель. Это сказано правильно и хорошо. Только как вы представляете использование математики на практике? Так ли, что решили в школе все возможные задачи, записали в тетрадь, перенумеровали, и когда нужно решить какую-нибудь практическую задачу, то вспоминаете, под каким номером эта задача у вас записана, раскрываете тетрадь и смотрите, как она решается. Так ли происходит использование умения решать задачи на практике?

Ученик. Ну нет. Всех задач не перерешишь, да их так много, что не запомнишь и не найдешь.

Учитель. Верно, на практике встречается столько различных задач, что в школе всех их перерешить нельзя.

Вас заставляют в школе решать задачи для того, чтобы вы научились вообще решать задачи.

Что же для этого нужно, чтобы решать задачи?

Ученик. Надо знать теорию, приемы решения разного типа задач.

Учитель. Верно. Но можно ли предусмотреть все типы задач и запомнить приемы их решения?

Ученик. Главные приемы можно... например, решение разного рода уравнений.

Учитель. Верно. Решать уравнения можно по готовому правилу. А для составления уравнений из условий задачи существуют ли какие-нибудь готовые приемы?

Ученик. Нет. Другой раз и не догадаешься, как составить уравнение.

Учитель. А что нужно для решения любой задачи, при составлении любого уравнения?

Ученик *(после размышления).* Нужно думать.

Учитель. Вот мы добрались до основной истины. Для решения любой задачи нужно думать. Вы решаете в школе задачи — много задач, — для того чтобы научиться думать. Вот мы с вами и решим сегодня еще одну задачу вдобавок к тем, которые вы уже решали.

Задача такая: найти шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 дает также шестизначные числа, написанные теми же цифрами, но в ином порядке.

Если это число обозначить так:

$$N = \overline{a_6\, a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1},$$

где a_1, a_2 . . . . , a_6 обозначают цифры числа, считая справа, то задача состоит в том, что в таблице

$$\begin{array}{r} N = \overline{a_6\, a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1} \\ 2\,N = .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 3\,N = .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 4\,N = .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 5\,N = .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 6\,N = .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array} \qquad \text{(I)}$$

надо найти цифры числа N и, кроме того, надо установить, в каком порядке эти цифры стоят на месте точек в нашей таблице.

Как приступить к решению этой задачи?

(Молчание.)

Каким способом решать ее?

(Молчание. После некоторой паузы.)

Ученик. Будем решать при помощи уравнений.

Учитель. Применение уравнений действительно очень облегчает решение арифметических задач.

А. Эйнштейн

Один из величайших современных ученых, недавно скончавшийся Альберт Эйнштейн (1879—1955), рассказывал по этому поводу следующее. В первом классе школы он слышал разговоры старших учеников о том, что они изучают какую-то алгебру. Первоклассник Эйнштейн спросил дома дядю, что это за алгебра. Дядя сказал: „Алгебра — это арифметика для лентяев, которым лень думать и решать задачу арифметически“.

Известный советский физик академик А. Ф. Иоффе пишет про свои первые школьные годы нечто подобное же.

„Мною руководил интерес к новым фактам, в таком изобилии рассеянным по книжкам, и к приемам счета — ловко придуманным правилам, заменяющим трудную задачу расчета в уме... Но мне эти правила казались каким-то не очень честным способом, с помощью которого можно, не думая, давать правильный ответ... Потом, когда мне удавалось разобраться „по существу“ в заковыристой задаче, казалось обидным узнать от учителя, что для каждого рода таких задач — с бассейнами, с едущими навстречу путешественниками, с делением наследства — существуют готовые механические шаблоны, дающие правильный ответ без размышлений...“*

Мы не должны относиться с пренебрежением ни к правилам решения типовых задач, ни к алгебре которая учит легкому способу решения трудных арифметических задач. Значение алгебры не только в этом. Она учит решать множество таких задач, которые арифметически решать или нельзя, или чрезвычайно трудно и сложно. Когда нам нужно получить ответ на поставленный математический вопрос и этот ответ можно получить при помощи алгебры, мы ее всегда применяем.

Однако это не лишает значения арифметические способы решения задач. Последние в большей степени, чем механические приемы и правила, заставляют думать.

Однако вернемся к нашей задаче.

Было предложение решать нашу задачу при помощи уравнений. Как это сделать? Сколько нам нужно уравнений составить?

Ученик. Шесть. Мы должны найти шесть цифр.

Учитель. Будет ли наша задача решена, если мы будем знать искомые шесть цифр?

---

* Акад. А. Ф. Иоффе. Моя жизнь и работа. ГТТИ. 1933, стр. 3.

Ученик. Мы должны знать еще, в каком порядке они разместятся во всех шести числах.

Учитель. Сколько нужно составить уравнений, чтобы найти искомые шесть цифр?

Ученик. Надо составить шесть уравнений и решать систему шести уравнений.

(Смех.)

Это трудно.

Учитель. Систему из шести уравнений все же решить можно; основная трудность решения задачи — в составлении такой системы уравнений, которая охватила бы все условия задачи.

Попробуем ее решать другими способами. Вспомним, что нужно делать для решения любой задачи.

Ученик. Надо думать.

Учитель. Попробуем сделать это...

(Молчание.)

Трудно ожидать, что мы сразу найдем все шесть цифр числа. Начнем с какой-нибудь из них.

Что можно сказать о цифре a_6?

(Молчание.)

Всякая ли цифра может стоять на первом месте нашего числа?

(Молчание.)

Учитель. Может ли стоять там цифра 0?

Ученик. Не может. У нас в таком случае не было бы шестизначного числа.

Учитель. Может ли a_6 равняться единице?

Ученик. Может.

Учитель. А двум?

Ученик *(после некоторой паузы)*. a_6 не может равняться двум, потому что в таком случае $5N$ было бы семизначным числом.

Учитель. Правильно, молодец! Итак, если искомое нами число существует, то в нем

$$\boxed{a_6 = 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Какая цифра стоит у числа $2N$ на первом месте? Может ли там стоять также 1?

Ученик. Не может. Если мы число N, у которого на первом месте слева стоит 1, умножим на 2, то у произведения 2 N первая цифра слева будет 2.

Учитель. Верно ли, что у второго числа на первом месте должна стоять именно цифра 2?

Ученик. У второго числа на первом месте будет или 2, или 3, в зависимости от того, чему равно a_5. Если a_5 равно 5 или большему числу, то у числа 2 N на первом месте будет цифра 3.

Учитель. Не будем пока уточнять вопрос о том, начинается ли второе число с 2 или 3, а сделаем гораздо более важный вывод.

Что можно сказать о всех первых слева цифрах искомых шести чисел?

Ученик *(после размышления)*. Первые цифры идут возрастая; у каждого последующего числа первая слева цифра больше, чем у предыдущего числа.

Учитель. Это очень важное заключение. Значит, все шесть первых цифр идут возрастая, начиная с единицы... Какое другое важное заключение можно сделать о цифрах искомого нами числа?

Раз наши шесть цифр идут возрастая, то могут ли среди них оказаться одинаковые?

Ученик. Конечно, нет.

Учитель. Это весьма важное заключение: эти шесть цифр различные, среди них нет одинаковых.

Какая из десяти цифр не может содержаться среди этих шести?

Ученик *(после паузы)*. Нуля среди этих шести цифр быть не может.

Учитель. Вот видите, сколько мы уже знаем о цифрах искомого числа! В нем и в произведениях его на 2, 3, 4, 5, 6, то есть у чисел нашей таблицы, на первых слева местах стоят шесть различных цифр, идущих в возрастающем порядке, начиная с единицы. Нуля среди них нет.

А в искомом нами числе сколько цифр?

Ученик. Шесть.

Учитель. Стоящие на первых слева местах цифры и цифры искомого числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 имеют ли что-нибудь общее?

Ученик. Эти же цифры и стоят на первых местах в таблице, только в числе N они идут в другом порядке, чем в первом столбце.

Учитель. Попробуем теперь сделать общие выводы о цифрах нашего искомого числа.

(После некоторых исправлений.)

Ответ:

Цифры a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 различные	. . . . (2)
Среди цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 нет нуля	. . . . (3)
Первые цифры чисел в таблице идут возрастая	. . . . (4)

Учитель. Видите, что мы установили об искомом числе.

Займемся цифрой a_1.

Всякая ли цифра может стоять на первом справа месте нашего числа?

Ученик. Нуль не может, так как его вообще нет среди цифр нашего числа.

Другой ученик. И единица не может, так как она стоит на шестом месте, а цифры искомого числа все разные.

Учитель. Может ли, например, быть $a_1=5$?

Ученик. Нет, не может: если бы a_1 было 5, то у $2N$ на конце стоял бы нуль. Среди цифр нашего числа нуля нет.

Учитель. По той же причине какие еще цифры не могут стоять на первом справа месте искомого числа?

Ученик. a_1 не может быть четною цифрою: если a_1 четная цифра, то число $5N$ имело бы на конце нуль.

Учитель. Значит, a_1 не может быть ни одной из цифр: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8. Остаются цифры 3, 7, 9, которые могли бы стоять на первом справа месте числа N.

Может ли быть $a_1=3$?

(Размышления, не давшие положительного результата. Это самое трудное место в решении задачи.)

Допустим, что $a_1=3$. Какие цифры в таком случае стояли бы на месте единиц в числах N, $2N$, $3N$, $4N$, $5N$, $6N$?

Ученик. 3, 6, 9, 2, 5, 8.

Учитель. Возможно ли это?

(Размышления. Определенного ответа не последовало.)

Сколько здесь цифр? И сколько цифр в нашем числе?

Ученик. Шесть и шесть.

Учитель. Могут ли выписанные шесть цифр быть цифрами искомого числа?

(Размышления. Вдруг оживленный ответ.)

Ученик. Не могут. Мы уже знаем, что $a_6=1$, а тут еще шесть других цифр; a_1 не может быть 3.

Учитель. Теперь вы сразу установите, может ли a_1 быть 7 или 9.

Ученик. Если $a_1=7$, то цифры единиц чисел нашей таблицы будут: 7, 4, 1, 8, 5, 2.

Если $a_1=9$, то эти цифры будут: 9, 8, 7, 6, 5, 4.

Отсюда видно, что 9 не может быть цифрой единиц числа по той же причине, почему $a_1 \neq 3$. Значит, $a_1=7$, если вообще искомое число существует.

Учитель. Запишем: если число N существует, то

$$\boxed{a_1=7} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Как мы можем переписать теперь нашу таблицу чисел

$$N,\ 2N,\ 3N,\ 4N,\ 5N,\ 6N?$$

Ученик. Мы можем вставить вместо некоторых букв и точек уже найденные цифры: в последнем (правом) столбце 7, 4, 1, 8, 5, 2, так как у N на конце может стоять только цифра 7; у $2N$, $3N$ и так далее последние цифры найдем умножением семи на 2, 3, 4,

и так далее. Левый крайний столбец мы можем заполнить, так как знаем, что там стоят те же 6 цифр, но идут в порядке возрастания: 1, 2, 4... Наша таблица чисел получает вид

$$\begin{array}{r|llllll} 1N & 1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 7 \\ 2N & 2 & . & . & . & . & 4 \\ 3N & 4 & . & . & . & . & 1 \\ 4N & 5 & . & . & . & . & 8 \\ 5N & 7 & . & . & . & . & 5 \\ 6N & 8 & . & . & . & . & 2 \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Учитель. Как найти цифру a_5?

Ученик *(с помощью учителя)*. a_5 не может быть 1, так как цифра 1 два раза в искомом числе не может повториться. a_5 не может быть 2, так как при таком предположении $3N$ не может иметь первой цифрой 4 (допуская, что a_4 имеет наибольшее возможное значение 8, мы имели бы $128\times3=384$, и на первом слева месте числа $3N$ мы имели бы не цифру 4, а 3); $a_5\neq3$, так как этой цифры вообще нет в искомом числе. Предположение, что $a_5=4$, возможно: умножая 14 (первые слева две цифры числа N) на 2, 3, 4, 5, 6, мы получим первые цифры 1, 2, 4, 5, 7, 8; a_5 не может быть ни 5, ни больше 5, так как в данном случае $2N$ имело бы первой цифрой 3. Итак:

$$\boxed{a_5=4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Учитель. Правильно. Таким же образом мы могли бы установить и цифры a_4 и a_3, но это можно сделать быстрее.

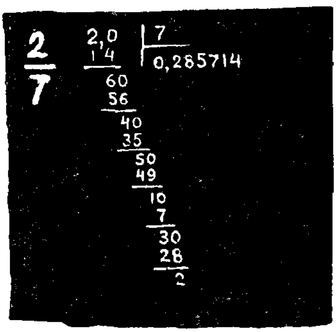
Мы видим, что как в первом, так и в последнем столбце нашей таблицы стоят все наши шесть цифр, только в разном порядке. Можно задать вопрос: не будут ли и в остальных столбцах стоять (в каждом) те же шесть различных цифр, только каждый раз в особом порядке?

Допустим, что это не так, что в некотором столбце имеются две одинаковые цифры. Допустим, например, что

$$5N=\overline{7\ a\ b\ c\ d\ 5},$$

$$4N=\overline{5\ e\ b\ f\ g\ 8},$$

то есть допустим, что в третьем слева столбце у обоих чисел имеется одинаковая цифра b. Если вычесть почленно эти равенства, то в левой части равенства мы получим $5N-4N=N$. В разности правых частей равенств мы получим в остатке на третьем месте 0, если $c>f$ или 9, если $c<f$. Но так как остаток есть число N, которое может содержать только уже найденные нами шесть цифр, среди которых нет ни 0, ни 9, то предположение о том, что в каком-нибудь столбце нашей таблицы содержатся одинаковые цифры, не может иметь места. Итак, в каждом столбце таблицы (II) содержатся те же цифры, что и в первом и последнем столбцах. Сумма цифр последнего столбца — 27, такова же сумма цифр во всех остальных столбцах. Складывая почленно равенства (II), имеем:



$$21\ N=2999997,$$

откуда

$$N=\frac{2999997}{21}=142857.$$

Умножая это число на 2, 3, 4, 5, 6, убеждаемся, что число это удовлетворяет условиям задачи, так как все числа таблицы выражаются одними и теми же шестью цифрами, расположенными лишь в различном порядке:

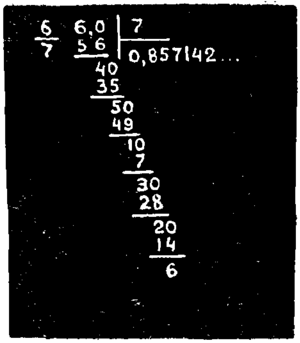
$$\begin{array}{l}
N=1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7\\
2N=2\ 8\ 5\ 7\ 1\ 4\\
3N=4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1\\
4N=5\ 7\ 1\ 4\ 2\ 8\\
5N=7\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5\\
6N=8\ 5\ 7\ 1\ 4\ 2
\end{array}$$

Итак, искомое число

$$\boxed{142857}\ \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Далее вызываются к доске шесть учащихся, каждому из которых дается одно из следующих шести заданий: обратить в десятичные дроби $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$

и $\frac{6}{7}$. Они, к общему удивлению класса, обнаруживают, что

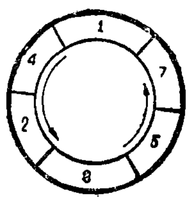


$$\frac{1}{7}=0,\ (142857),$$
$$\frac{2}{7}=0,\ (285714),$$
$$\frac{3}{7}=0,\ (428571),$$
$$\frac{4}{7}=0,\ (571428),$$
$$\frac{5}{7}=0,\ (714285),$$
$$\frac{6}{7}=0,\ (857142).$$

Оказывается, наши шесть чисел являются периодами обращенных в десятичные дроби $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$. Периодом для $\frac{1}{7}$ является наше число 142 857; все другие периоды образуются из него переносом одной или нескольких первых цифр в конец. Если написать цифры числа 142 857 на круге, то все 6 периодов получаются при движении по этому кругу, начиная с определенной цифры: с 1, с 2, с 4, с 5, с 7, с 8. Такой способ образования чисел называется „круговой перестановкой“ цифр.

Не вдаваясь в дальнейшие подробности, отметим лишь, что не для всех дробей имеет место такое правило образования периодов, какое мы видим у дробей $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ и так далее. Так, например:

$$\frac{1}{11}=0,\ (09),$$
$$\frac{2}{11}=0,\ (18),$$
$$\frac{3}{11}=0,\ (27),$$
. . . .



Урок закончился следующей беседой.

Учитель. Что ж, ребята, была у вас решена тысяча задач, теперь стало 1001, одной решенной задачей больше.

Ученик. Это необычная задача.

Учитель. Чем же она необычна?

Ученик. Уж очень красиво она решена.

Учитель. Красиво? Да разве красота имеет какое-нибудь значение?

Ученица. А как же! Красивую песню, например, хочется петь, а некрасивую — нет.

Учитель. Верно, ребята. Красота имеет большое значение в каждом деле.

Афанасий Афанасьевич Фет, один из выдающихся русских поэтов послепушкинского периода, сказал:

„Только песне нужна красота;
Красоте же и песен не надо!"

Другими словами: красота ценна сама по себе, песня же без красоты может не иметь никакой ценности.

Есть красота и в математике. Одну и ту же задачу можно решить часто разными способами. В математике красиво то, что просто. Если сложная задача решается простыми средствами и кратким путем, — это будет красиво. Когда та же задача решается длинным путем и при помощи сложных средств, — это некрасиво. Великий русский математик П. Л. Чебышев создал в математике направление, для которого характерно требование решать вопросы возможно простыми средствами.

Не бывало ли у вас случаев, когда ваша учительница вам за решение задачи ставила не 5, а 4, хотя задача была решена верно?

Ученики. Бывали.

Учитель. Это было в тех случаях, когда вы решили задачу хотя и верно, но некрасиво.

Условимся в дальнейшем следовать правилам, которые в заключение урока запишем и всегда будем помнить:

Решив задачу, ученик должен задать себе два вопроса:
1) верно ли я решил задачу?
2) красиво ли я решал ее?

Только при утвердительном ответе на оба эти вопроса можно ожидать, что работа будет оценена пятеркой.

Для получения пятерки за решение задачи *необходимо, но не достаточно* решить ее верно. Надо решить задачу возможно просто, то есть возможно красиво.

Запомните навсегда этот совет старого учителя!

Урок окончен.

РАССКАЗ ВТОРОЙ

о том, что при решении задач нужно внимательно относиться к каждому слову условия

При решении задачи важно обратить внимание на каждое слово ее условия. Иногда возможность решения задачи зависит от таких слов условия задачи, которые на первый взгляд кажутся несущественными.

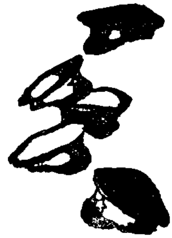
Следующие две задачи представляют примеры таких задач, решение которых зависит от внимательного отношения к каждому слову условия.

1

У отца было три сына. Все они хорошо учились. Отцу захотелось проверить, кто из них самый сообразительный. Для этого было проведено следующее испытание.

Было взято 5 фуражек. На трех из них на глазах мальчиков были прикреплены красные звезды, на двух — белые. Мальчикам завязали глаза, затем надели каждому на голову фуражку, а две остальные фуражки убрали. После этого у мальчиков сняли повязки с глаз и задали вопрос: какая — красная или белая — звезда у него на фуражке?

Подумав некоторое время, один из мальчиков сказал, какая на его фуражке звезда, и правильно обосновал свой ответ.



Вопрос: Какая звезда была на фуражке этого мальчика, как он узнал это, и какие звезды были на фуражках других двух мальчиков?

Примечание: продолжайте чтение только после того, когда сами решили задачу или, по крайней мере, пытались решить ее.

Решение

Для решения задачи существенно указание, что мальчик мог ответить только после того, как подумал некоторое время.

На трех фуражках могли быть только следующие распределения звезд:

1) белая, белая, красная;
2) белая, красная, красная;
3) красная, красная, красная.

Если бы имел место первый случай, то третий мальчик, зная, что имеются только две белые звезды, сразу бы сказал, что у него на фуражке красная звезда. Думать в этом случае не понадобилось бы.

Если бы имело место второе распределение звезд, то второй (равно, как и третий) мальчик, видя у одного из братьев белую, а у другого красную звезду, должен был бы сразу сказать, что у него на фуражке красная звезда, так как, будь у него белая звезда, то третий брат сразу бы заявил, что у него красная звезда. И в этом случае думать не понадобилось бы.

Так как по условию задачи ответ последовал лишь после того, как мальчик подумал некоторое время, то имело место третье распределение звезд, так как каждому из мальчиков нужно было выждать, не заявят ли другие о цвете своих звезд.

Итак, у всех мальчиков были надеты фуражки с красной звездой, все мальчики в решении вопроса были в одинаковых условиях, поэтому ответ того мальчика, который первым заявил, что у него красная звезда, действительно выявлял самого сообразительного среди троих.

Если бы в условии задачи не стояли слова, что мальчик ответил, „подумав некоторое время“, то задачу вообще нельзя было бы решить.

После решения задачи 1 внимательный читатель может решить задачу 2, которая хотя и более сложная по содержанию и требует некоторых вычислений, но по существу и способу решения близка к задаче 1.

Попытайтесь решить ее самостоятельно, не заглядывая в даваемое нами решение раньше, чем сами решили ее или пришли к окончательному выводу, что самостоятельное решение ее для вас непосильно.

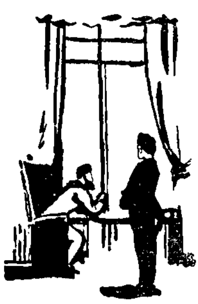
2

Вы, конечно, читали рассказы известного английского писателя А. Конан-Дойля „Приключения Шерлока Холмса“. Решим задачу в стиле тех задач, которые в своих розысках решает Шерлок Холмс.

Доктор Уотсон и его гость Шерлок Холмс сидят при открытом окне. Из сада доносятся веселые голоса большой группы детей

Гость. Скажите, пожалуйста, сколько у вас детей?

Хозяин. Тут не только мои, а дети четырех семей. Моя команда самая многочисленная, братнина — меньше, сестрина — еще меньше, а дети дяди — самая малочисленная группа. Они шумят беспорядочно, так как их не хватает для двух команд по девять человек в каждой. Любопытное совпадение: если перемножить четыре числа, выражающие количество детей наших семей, то получим номер нашего дома, который вы знаете.



Гость. Я ведь учился в школе математике! Попробую найти число детей каждой из семей. (*После некоторых вычислений гость заявил.*) Для решения задачи данных мало. Скажите, у дяди один ребенок или больше?

Хозяин дал требуемый ответ, содержания которого мы не знаем.

Гость. Теперь я могу дать точный ответ о числе детей!

Он действительно дал правильный ответ.

Вопрос: какой был номер дома и сколько было детей в каждой из четырех семей?

Решение

Гость решал задачу, очевидно, таким образом. Он знал, что детей всех четырех семей меньше 18. Он знал номер дома N.

Если обозначить числа детей четырех семейств буквами a, b, c, d, то все эти числа целые и положительные, и номер дома N равен их произведению:

$$N = abcd,$$

где $a > b > c > d$ и $a + b + c + d < 18$.

Гостю нужно было подобрать такие четыре различных целых числа, чтобы их произведение было N и чтобы сумма их была меньше 18. Но найти числа гостю не удалось, и он должен был спросить, был ли у дяди один ребенок или больше. Только после этого гость мог дать точный ответ на вопрос задачи.

Мы при решении задачи находимся в более трудном положении, так как мы не знаем номера дома N; поэтому решать по тому плану, как ее решал гость, мы не можем.

Однако все же решить задачу мы в состоянии, если... если несколько подумать.

Прежде всего решим вопрос: сколько детей могло быть у дяди?

Легко убедиться, что у него не могло быть троих детей.

Если предположить, что число детей дяди $d = 3$, то имели бы: c не меньше 4, b не меньше 5, a не меньше 6, а всего вместе детей не меньше

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18.$$

Однако детей было менее 18. Следовательно, у дяди могло быть или 2 ребенка, или один.

Составим таблицу всех возможных случаев произведений четырех различных целых чисел, таких, чтобы наименьшее число было 2, а сумма четырех чисел меньше 18.

Таких случаев имеется всего семь:

Числа	Сумма их	Произведение
2 · 3 · 4 · 5	14	120
2 · 3 · 4 6	15	144
2 · 3 · 4 · 7	16	168
2 · 3 · 4 · 8	17	192
2 · 3 · 5 · 6	16	180
2 · 3 · 5 · 7	17	210
2 · 4 · 5 · 6	17	240

При предположении, что у дяди было двое детей, возможны семь различных решений относительно числа детей в четырех семьях, если лишь удовлетворить требованию, чтобы число всех детей было меньше 18.

Предположив, что у дяди был только один ребенок, составим таким же образом все случаи произведений четырех различных целых чисел, среди которых наименьшее число есть 1, а сумма всех четырех чисел меньше 18. Таких четверок чисел будет уже большое число*. Однако для решения задачи нам нет надобности составлять таблицу всех возможных произведений таких чисел, если внимательно отнестись к условию задачи.

Гость, решая задачу, заявил, что данных для получения точного ответа мало, что он должен знать, был ли у дяди один ребенок или больше. Почему это было необходимо знать решающему задачу, исходя из известного ему числа N (номера дома)? Очевидно, что номер дома N был такой, что он являлся произведением четырех различных целых чисел как в случае, если за наименьшее число взять 1, так и в случае, если наименьшее число есть 2.

Это обстоятельство дает нам возможность найти число N (номер дома): это число должно содержаться в составленной нами выше таблице и также содержаться в таблице произведений четырех чисел, начинающихся с 1.

Так как в первой нашей таблице наименьшее произведение 120, то, составляя таблицу произведений четырех различных чисел с наименьшим множителем 1, мы можем ограничиться только теми случаями четырех

* Составьте таблицу их!

множителей, произведение которых не менее 120, и этим сократить вычисление.

Таковых очень мало.

Числа	Сумма их	Произведение
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8$	17	120
$1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7$	17	126
$1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	16	120
$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7$	17	140

Мы видим, что единственное общее число в обеих группах произведений 120. Очевидно, что номер дома

$$N=120.$$

Сколько же было детей в каждой из четырех семей? Произведение 120 получается в трех случаях:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$$
$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8=120$$
$$1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6=120$$

Внимательное чтение условия задачи и в этом случае дает возможность решить вопрос.

Гость сказал, что после того как ему станет известно, был ли у дяди один ребенок или больше, он может точно ответить на вопрос задачи о числе детей каждой из четырех семей.

Если бы гостю сказали, что у дяди был один ребенок, то гость не мог бы дать точного ответа о числе детей, так как номер дома, $N=120$, получается в двух возможных случаях, именно при:

$$d=1,\ c=3,\ b=5,\ a=8,$$
$$d=1,\ c=4,\ b=5,\ a=6.$$

Так как гость мог дать определенный ответ, то ему было сказано, что у дяди двое детей, и тогда номер дома, $N=120$, получается только в том случае, если

$$d=2,\ c=3,\ b=4,\ a=5.$$

Задачу, для решения которой, на первый взгляд, как будто не было достаточных данных, оказалось возможным решить, но при условии внимательного отношения к каждому слову. Будем это требование помнить при решении каждой задачи.

РАССКАЗ ТРЕТИЙ

Математические кроссворды

Один знаменитый писатель сказал: „Есть много умных вещей, которые находят глупое применение, и есть пустяки, которые можно использовать умно".

Это высказывание напоминает слова известного советского математика А. Я. Хинчина (1894—1959) об игре в кости.

Как это ни покажется странным, расчеты в игре в кости (бросание кубика) в XVII веке содействовали разработке математической науки теории вероятности.

А. Я. Хинчин по этому поводу сказал: „Математики шутя говорят, что глупая игра в кости породила большую и мудрую науку, очень важную для практической деятельности людей, в то время как умная игра в шахматы в истории науки никакой роли не сыграла"*.

Кроссвордами увлекаются очень многие. Для раскрытия обычных кроссвордов требуется только память. Математические же кроссворды, которые вы найдете в книге, являются очень хорошим материалом для развития внимания и логического рассуждения. В самое последнее время пара таких кроссвордов появилась среди задач математических олимпиад.

---

* Чтобы любители шахмат не обиделись, добавим высказывание одного из создателей современной кибернетики Клода Шеннона: „Шахматы могут послужить острием клина, пробивающим новые пути исследования".

ЗАДАЧА № 1

Заменим это записью по-английски:

$$\begin{array}{r} 40 \\ +\,10 \\ 10 \\ \hline 60 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} forty \\ +\;\; ten \\ ten \\ \hline sixty \end{array}$$

Заменить в английской записи буквы цифрами так, чтобы получилось правильное сложение, то есть чтобы каждая буква заменилась определенною цифрою, независимо от того, где эта буква стоит.

Решение

1) В столбце единиц сумма $y+n+n$ имеет цифру единиц y; значит, $n+n=0$ или $n+n=10$;

отсюда $n=0$ или $n=5$.

2) В столбце десятков сумма $t+e+e$ или $t+e+e+1$ (второе в том случае, если $n=5$ и из столбца единиц к десяткам перейдет 1) имеет последней цифрой t; это возможно, если $e+e=0$ или 10, или если $e+e+1=$ $=10$. Последнее невозможно, так как $e+e$ не может равняться девяти; поэтому

$$\boxed{n=0} \quad \text{и} \quad \boxed{e=5}\,.$$

3) В разряде десятков тысяч стоит только f, а в сумме — s. Значит, из разряда тысяч получился один десяток тысяч:

$$\boxed{f+1=s}$$

4) В столбце тысяч цифра o при сложении перешла в i, причем $i\neq 0$, так как $n=0$. Это возможно лишь в том случае, если $o=9$ и из столбца сотен прибавляется к o тысячам две; тогда

$$\boxed{o=9} \quad \text{и} \quad \boxed{i=1}\,.$$

Задача перепишется теперь так:

$$\begin{array}{r} f9rty \\ +\quad t50 \\ t50 \\ {\scriptstyle 1\,2\,1} \\ \hline sixty \end{array} \qquad \text{и } f+1=s.$$

5) В столбце сотен

$$r + 2t + 1 = 20 + x, \text{ где } x \text{ не меньше чем } 2$$
$$(x \text{ не может быть ни } 0 \text{ ни } 1).$$

Для r, t и x остались цифры 2, 3, 4, 6, 7, 8.

При $t=6$ (или меньше 6) равенство $r+2t+1=$ $=20+x$ невозможно, так как при $t=6$ и $r=8$ (наибольшее возможное для r значение) $r+2t+1=21$ (вместо наименьшего допустимого значения 22). Для t возможны только значения $t=7$ или $t=8$.

6) Если $t=7$, то равенство

$$r + 2t + 1 = 20 + x, \text{ где } x > 1,$$

выполняется только при

$$r = 8, \ x = 3.$$

7) Если $t=8$, то равенство

$$r + 2t + 1 = 20 + x, \text{ при } x > 1$$

выполняется в двух случаях:

$$r = 6 \text{ и } x = 3$$

или

$$r = 7 \text{ и } x = 4.$$

Составим сводку всех полученных результатов

		f	o	r	t	y	e	n	s	i	x	
Имеем для букв цифровые значения	1)		9	8	7		5	0		1	3	и $f+1=s$.
	2)		9	6	8		5	0		1	3	
	3)		9	7	8		5	0		1	4	

Для букв f, y, s остаются цифры
в случае 1: 2, 4, 6,
в случае 2: 2, 4, 7,
в случае 3: 2, 3, 6.

Так как $f+1=s$, то есть f и s суть последовательные цифры, то задаче удовлетворяет только третий случай.

$$\boxed{f=2}, \quad \boxed{s=3}, \quad \boxed{y=6},$$

в котором $\boxed{t=8}$, $\boxed{r=7}$, $\boxed{x=4}$.

Вставив эти значения в условие задачи, имеем

$$\begin{array}{r} 29786 \\ +\quad 850 \\ 850 \\ \hline 31486 \end{array}$$

ЗАДАЧА № 2

$$\begin{array}{r} +\ \mathit{send} \\ \mathit{more} \\ \hline \mathit{money} \end{array}$$ — в переводе „Шлите еще денег“.

Заменить буквы цифрами.

Решение:

Очевидно, $\boxed{m=1}$ как единица переноса с IV столбца; не может быть $m=2$, так как сумма двух цифр не больше $9+8=17$. Вставим 1 вместо m:

$$\begin{array}{r} +\ s\,e\,n\,d \\ 1\,o\,r\,e \\ \hline 1\,o\,n\,e\,y \end{array}$$

o не может быть 1 (так как $m=1$) или больше 1: даже при предположении получения из III столбца единицы переноса и при наибольшем допустимом значении для s (именно $s=9$), в IV столбце сумма была бы меньше 12. Итак $o=0$ и $s=9$ и из III столбца единицы переноса в IV столбец не будет. Вставив найденные значения в запись задачи и учитывая, что в III столбце цифра e не перешла в сумму, убеждаемся, что II столбец дает единицу переноса для III, и имеем:

$$\begin{array}{r} 9\,e\,n\,d \\ 1\,0\,r\,e \\ {\scriptstyle 1\quad 1} \\ \hline 1\,0\,n\,e\,y \end{array} \quad \text{и} \quad \boxed{o=0;\ s=9;\ e+1=n}$$

Дает ли I столбец единицу переноса для II?

Если предположить, что она не получится, то $n+r=10+e$, или $e+1+r=10+e$, или $r=9$, что невозможно, так как $s=9$. Итак, единица переноса в I столбце получается, и $n+r+1=10+e$ или $e+1+$ $+r+1=10+e$, то есть $\boxed{r=8}$.

Запись задачи принимает вид:

$$\begin{array}{r} 9end \\ 108e \\ \scriptstyle 1\ \ 1\ 1 \\ \hline 10ney \end{array}$$

и $e+d=10+y$.

Наименьшее значение для y есть цифра 2, наибольшее значение для $10+y$, то есть для $e+d=7+6=$ $=13$. Итак

$$12 \leqslant 10+y \leqslant 13.$$

Сумма $e+d$ не может равняться 13, что имело бы место при $e=7$ и $d=6$ или при $e=6$, $d=7$; при $e=7$ и $d=6$ $n=e+1=8$, что невозможно, ибо $r=8$; при $e=6$ и $d=7$ имели бы $n=7$, что также невозможно, так как n и d должны быть различными. Итак,

$e+d=12$, что возможно в случаях $e=5$, $d=7$ и $e=7$, $d=5$; в обоих предположениях $y=2$.

Составим таблицу:

$10+y$	12	12
e	5	7
d	7	5
y	2	2
$n=e+1$	6	8

Вторая комбинация отпадает, так как n не может равняться 8 (ведь $r=8$).

Остается единственное возможное решение

$\boxed{e=5}$, $\boxed{d=7}$, $\boxed{y=2}$, $\boxed{n=6}$.

Ответ:

$$+\begin{array}{r} 9567 \\ 1085 \\ \hline 10652 \end{array}$$

ЗАДАЧА № 3

Конференция американских учителей получила от учителей-супругов, которые не могли присутствовать, телеграмму: „Д и Ж Андре шлют привет“ (Д и Ж — инициалы).

$$\begin{array}{r} D\,\&^{*}\,J \\ +\,A\,N\,D\,R\,E\,\;E \\ S\,E\,N\,\;D \\ \hline C\,H\,E\,E\,\;R \end{array}$$

Заменить каждый знак цифрою, если дано, что $E^2 = H$.

Решение

$\boxed{A=0}$, $\boxed{N+1=C}$, так как N не переходит в сумму, а сумма четвертого столбца менее 20, поэтому к пятому столбцу может прибавиться только 1.

$H = E^2$; квадратами среди цифр являются только $1 = 1^2$, $4 = 2^2$ и $9 = 3^2$. $H \neq 1$, так как при $H = 1$ и $E = 1$, что невозможно; $H \neq 9$, так как в сумме IV столбца не может получиться 19, так как при предположении $H = 9$ сумма $D + S$ может иметь наибольшим значением $8 + 7 = 15$, а сумма III столбца меньше 30, так что к IV столбцу от III прибавится не более 2.

Итак, $\boxed{H=4}$, $\boxed{E=2}$.

Задача перепишется так:

$$\begin{array}{r} D\,\&\,J \\ 0\,N\,D\,R\,2\,2 \\ S\,2\,N\,D \\ \overset{1}{} \\ \hline C\,4\,2\,2\,R \end{array}$$

$J + 2 + D < 20$, так как наибольшие возможные значения J и D 8 и 9; во II столбец может прибавиться только 1; $\& + 2 + N$ больше 2, но даже в том случае, когда от I столбца добавится 1, $\& + 2 + N + 1 < 22$, следовательно, к III столбцу прибавится 1.

---

* Знак & называется амперсенд и употребляется в математике и в коммерческой практике часто для обозначения „и". Другим подобным часто употребляемым знаком является NB — нотабене — соединение первых букв латинских слов Nota Bene — „заметь хорошенько" (англичанин вместо этого говорит: „Mark twain" — „отметь дважды"; вероятно, отсюда псевдоним писателя Марка Твена).

В III столбце $D+R+2+1<22$, поэтому к IV столбцу от третьего прибавится 1.

Теперь задача получает вид:

$$\begin{array}{r} D\&J \\ ONDR22 \\ S2ND \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ } \\ \hline C422R \end{array} \qquad D+S=13, \quad D+R=9, \quad D<9.$$

$D\neq 8$, так как в I столбце J не переходит в сумму;
$D\neq 1$, так как $D+S=13$, где S — цифра;
$D\neq 3$ — по той же причине;
$D\neq 5$, так как $D+R=9$ и $R\neq 4$.

Для D остаются допустимые значения 6 и 7. Предположение $D=7$ отпадает, так как из III столбца получилось бы $R=2$, что невозможно. Остается единственная возможность: $\boxed{D=6}$, из III столбца $\boxed{R=3}$ и из I столбца $J+2+6=13$ (сумма не может равняться 3), то есть $\boxed{J=5}$; из IV столбца тогда имеем $\boxed{S=7}$.

Теперь задача принимает вид:

$$\begin{array}{r} 6\&5 \\ N6322 \\ 72N6 \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 1} \\ \hline C4223 \end{array}$$

Неиспользованными остались цифры 1, 8, 9.

Так как $N+1=C$, а 8 и 9 последовательные цифры, то:

$\boxed{N=8}$, $\boxed{C=9}$ и $\boxed{\&=1}$.

Окончательное решение:

$$\begin{array}{r} 615 \\ 86322 \\ 7286 \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 1} \\ \hline 94223 \end{array}$$

Решите такими же рассуждениями следующие кроссворды:

$$1)\quad \begin{array}{r} \mathit{hans} \\ +\ \mathit{heinz} \\ \hline \mathit{lassen} \end{array}$$

(имена и фамилия ученика; задача была предложена на олимпиаде в Берлине в 1960 году).

$$2)\quad \begin{array}{r} 50 \\ 4 \\ +\ 4 \\ 2 \\ \hline 60 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \mathit{fifty} \\ \mathit{four} \\ +\ \mathit{four} \\ \mathit{two} \\ \hline \mathit{sixty} \end{array}$$

и *four* + 12 есть полный квадрат.

(Задача предложена в заочном туре второй Всесибирской олимпиады в 1963 году. Задачу можно решить без дополнительного условия, что *four* + 12 равно полному квадрату).

$$3)\quad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 8 \\ 9 \\ \hline 20 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \mathit{three} \\ +\ \mathit{eight} \\ \mathit{nine} \\ \hline \mathit{twenty} \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{r} \mathit{scan} \\ \mathit{these} \\ \hline \mathit{digits} \end{array}$$ „Найди эти цифры".

Для решения предложенных примеров никаких знаний по математике не надо, надо лишь все время думать и рассуждать.

Не ожидайте, что вы при первой попытке решите любую из этих задач.

После нахождения решения время от времени возвращайтесь к задаче: вы убедитесь, что задачу можно решить проще.

Правильность решения устанавливается тем, что получится правильное сложение.

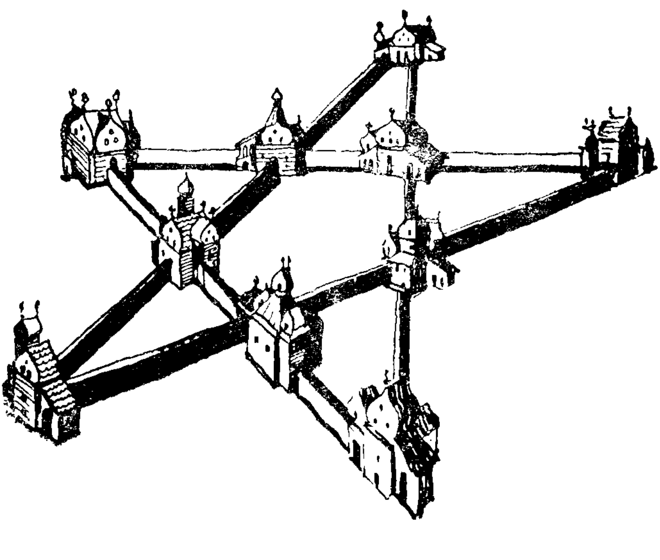
РАССКАЗ ЧЕТВЕРТЫЙ

Задачи на расположение точек

1. ЗАДАЧА О ДЕСЯТИ КРЕПОСТЯХ

Какой-то царь, скажем, царь Горох, распорядился построить укрепленное место, состоящее из десяти крепостей, соединенных между собою траншеями. Траншеи должны были представлять пять прямых линий, на каждой по четыре крепости.

Инженеры представили план в виде пятиконечной звезды. Но царь остался недоволен планом по той причине, что все крепости оказались доступными атаке снаружи. Было желательно, чтобы одна или больше



крепостей были защищены траншеями со всех сторон так, чтобы неприятель не мог подойти к ним.

Инженеры долго уверяли, что такое расположение крепостей невозможно; царь же продолжал настаивать на необходимости найти нужное ему решение.

Наконец удалось найти такое расположение, и не одно, а несколько, притом не равноценных в боевом отношении.

Постарайтесь найти самостоятельное решение вопроса.

Решение

Задачу можно решить несколькими способами.

Эта задача принадлежит к так называемым задачам на расположение точек.

Самый известный за последние десятилетия специалист по головоломкам, английский математик Эрнест Дюдни (1857—1931), автор целого ряда книг в этой области, дал 5 решений этой задачи.

Он назвал их: воронка, стрела, циркуль, гвоздь, ножницы (смотри чертеж) и добавил к своему решению указание:

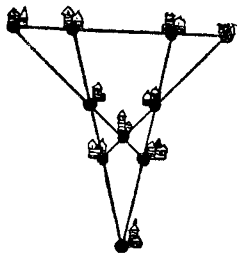
„Для решения задач на расположение точек можно дать лишь один совет: „Испробуйте методы воронки, стрелы, циркуля, гвоздя и ножниц, а если они не помогут, проявите свое остроумие“.

Совет правильный, однако как его использовать?

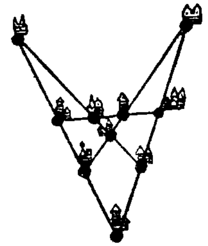
Французский писатель Жан Фабр (1824—1915), получивший за свои книги звание члена Парижской академии и нобелевскую премию, одну из своих книг кончает так:

„Если мне удалось написать страницу-другую, которую ты, читатель, прочел без скуки, то я обязан в этом в большой степени математике — этой удивительной учительнице в искусстве направлять мысли, приводить их в порядок, выкорчевывать глупости и дать ясность — эту высшую форму искусства изложения. Она (математика), правда, не создает остроумия— тот нежный цветок, который растет не на всякой почве и распускается так, что никто не знает как“. Но вы не опускайте в отчаянии руки, а послушайте совета талантливого венгерского математика Пойа:

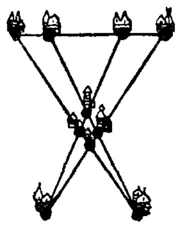
„Найти безотказно действующие правила для



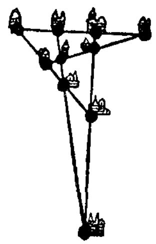
Воронка



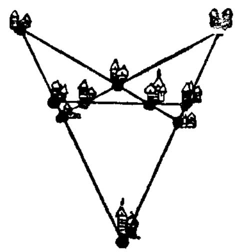
Стрела



Ножницы



Гвоздь



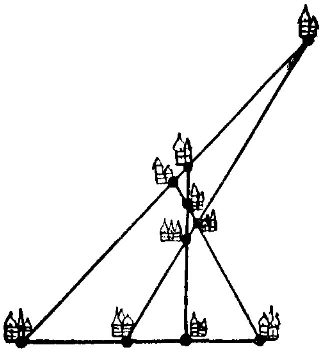
Циркуль

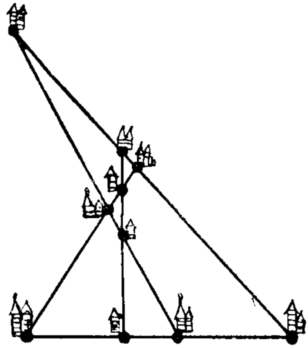
решения *всех* возможных задач — это старая мечта, которая навсегда останется только мечтой... Но можно изучить типичные приемы, полезные при решении задач... Собрание таких приемов, расположенных в четкой последовательности, — вещь возможная".

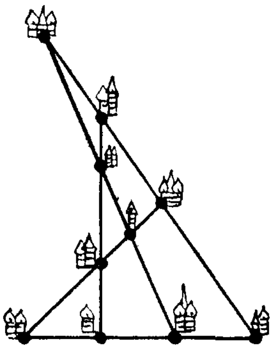
Иными словами: нельзя научить никого решать любую задачу, но можно научиться решать задачи, не содержащие особенных трудностей.

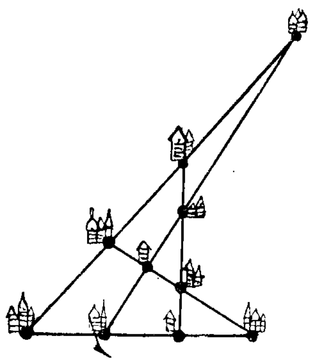
В первом издании нашей книги мы предложили читателям поискать дальнейшие решения задачи о десяти крепостях.

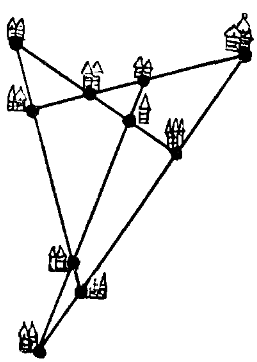
Призыв наш вызвал много откликов читателей. Вот примеры найденных школьниками новых решений задачи, из которых представляют особый интерес те, которые дают две крепости, защищенные рядами укреплений,

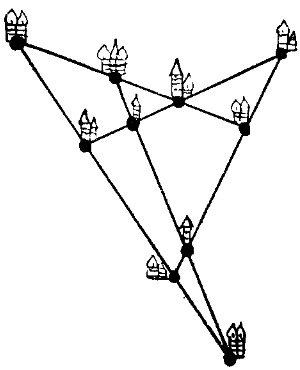












2. ЗАДАЧА НЬЮТОНА

В двух старых (1721 и 1852 годов) английских сборниках занимательных задач мы встретили одну и ту же задачу на расположение точек. В обоих случаях задача изложена стихами, но разными. В первом сборнике они читаются так:

„Your aid I want, nine trees to plant
In rows just half a score,
And let there be in each row three,
Solve this: I ask no more“,

что значит:

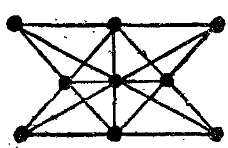
„Мне нужна ваша помощь, чтобы посадить девять деревьев в десять рядов так, чтобы в каждом ряду было три. Скажи — как, и я ничего больше у тебя не спрошу“.

Задача приписывается величайшему математику Исааку Ньютону (1642—1727).

Сходство этой задачи с предыдущей очевидно.

По смыслу задачи как будто требуется $3 \cdot 10 = 30$ деревьев, — их же имеется только девять. Значит, по крайней мере некоторые деревья должны стоять на пересечении нескольких рядов. Назовем такие точки кратными. Можно подсчитать, сколько кратных точек и какой именно кратности требуется для выполнения условий задачи.

Этот подсчет облегчает поиски возможных решений.



Если бы все 9 точек были двукратными или трехкратными, то мы уместили бы соответственно 18 или 27 деревьев, и решения задачи при этом не получится. Решение требует точек кратности четыре или выше; иными словами, некоторые деревья должны стоять на пересечении четырех или большего числа рядов. Так, например, 3 четверные и 6 тройных точек или 6 четверных и 3 двойные точки дают требуемое число — 30 точек. Таким образом, можно предварительно подсчитать все возможные случаи сочетания кратных точек, удовлетворяющих условию задачи, и затем испытать возможность осуществления этих случаев на плоскости. Вот одно из решений задачи Ньютона.

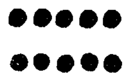
Здесь мы имеем 3 четверные и 6 тройных точек, то есть осуществлено первое указанное выше сочетание кратных точек, соответствующих 30 простым точкам.

Ищите другое решение задачи, не смущаясь тем, что она очень проста: ею, по преданию, занимался сам Ньютон.

3. ЗАДАЧА ЛЬЮИСА КЕРРОЛЛА

Самой интересной задачей на расположение точек на плоскости является задача Льюиса Керролла.

Десять монет (жетонов) расположены следующим образом:



Надо передвинуть только 4 монеты в такое положение, чтобы на пяти различных прямых оказалось по 4 монеты.

Задача допускает до 300 различных решений. Требуется найти по возможности большее число их и метод, по которому можно было бы разыскать эти решения, не рассматривая каждую комбинацию точек, оставшихся на своих местах.

Появилась эта задача в разных формах, но ни у Керролла, ни в сборниках не ставился вопрос о нахождении всех, или по возможности всех, решений ее и общего метода нахождения этих решений.

Решение

1) Передвинуть можно лишь одну точку (монету) одного и 3 точки другого ряда. Беря по две точки из каждого ряда, нельзя получить пяти рядов по 4 точки в каждом.

2) Будем передвигать 3 точки верхнего ряда и, следовательно, оставлять на своих местах 2 точки этого верхнего ряда. Каждому решению, полученному при этом предположении, соответствует такое же решение, при котором оставшиеся две неподвижные точки лежат на соответственных местах в нижнем ряду. Вследствие этого число необходимых построений уменьшается в два раза.

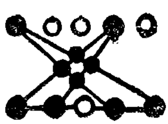
3) Две неподвижные точки в верхнем ряду можно получать столькими способами, сколькими можно из пяти предметов брать по два, не считаясь с порядком

элементов в этой паре. Легко проверить, что это можно сделать десятью способами, беря 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 3 и 4, 3 и 5, 4 и 5.

4) Из нижнего ряда можно удалить первую, вторую, третью, четвертую или пятую точки. Каждому из этих случаев соответствует 10 комбинаций оставшихся на месте двух точек верхнего ряда, следовательно, имеем 50 комбинаций.

5) Для любой из этих комбинаций существует по крайней мере одно решение задачи, которое получится, если соединить каждую из оставшихся в верхнем ряду двух точек с двумя точками нижнего ряда так, чтобы соединяющие прямые пересекались между собой, и поместить передвигаемые точки на пересечениях вспомогательных прямых. Чтобы эти пересечения получились, достаточно левую верхнюю точку соединить с двумя правыми точками нижнего ряда, а правую верхнюю точку — с остальными двумя точками нижнего ряда. Тогда имеем 4 ряда по 4 точки, а, кроме того, в нижнем ряду остались 4 точки в одном ряду.

Если обозначить места передвинутых точек кружками, то решение представляется, например, в виде следующей фигуры:



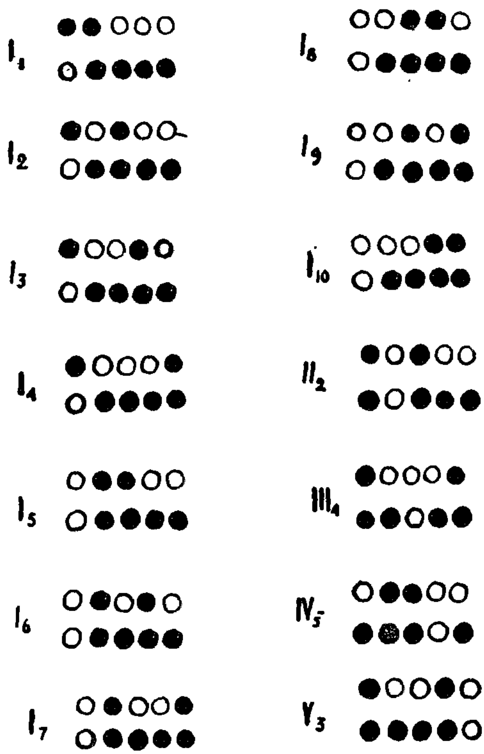
Такое построение возможно при любом из 50 расположений оставшихся неподвижными точек, и мы имеем 50 решений, оставляя 2 неподвижные точки в верхнем ряду, и столько же решений, оставляя 2 неподвижные точки в нижнем ряду, а всего 100 решений. Будем называть эти решения внутренними, так как передвигаемые точки остаются между первоначально данными рядами.

6) Естественно полагать, что внутренние решения не будут единственно возможными, а что, кроме них, существуют и решения, в которых передвигаемые точки займут частично положения вне первоначально данных двух рядов. Будем называть эти решения смешанными. Для нахождения их надо рассмотреть все 50 комбинаций двух точек в первом и четырех точек во втором ряду.

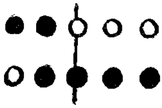
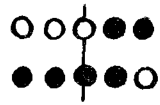
Будем обозначать эти комбинации символами I_1, $I_2 \ldots I_{10}$, II_1, $II_2 \ldots II_{10}, \ldots$ V_1, $V_2 \ldots V_{10}$.

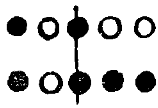
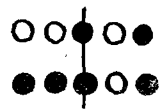
Латинская цифра показывает, которая точка нижнего ряда удаляется, а индийские цифры 1, 2 . . . 10 означают различные из возможных положений двух неподвижных точек верхнего ряда.

При таком способе обозначения символы I_1, I_2 . . . V_{10} соответствуют всем возможным расположениям неподвижных точек. Примеры:



7) Среди полученных 50 расположений точек относительно вертикальной прямой, проведенной через третьи точки обоих рядов, окажутся попарно симметричные. Так, например, I_1 симметричен V_{10}, II_2 симметричен IV_9 и т. д. Решение, возможное для одного

I_1  V_{10} 

II_2  IV_9 

расположения точек, дает аналогичное решение и для соответственного парного ему расположения.

Остается рассмотреть 25 случаев. Почти каждое решение для любого из этих расположений точек дает решение для соответственного парного расположения; перестановка верхнего и нижнего ряда еще удваивает число решений, так что каждое найденное для 25 случаев решение дает в окончательном итоге 4 решения.

8) Мы даем не все 25 основных случаев задачи Керролла, а лишь несколько. Ищите остальные!

9) Для нескольких расположений точек не получается ни одного смешанного решения (внутренние решения существуют для всех расположений точек). Все эти случаи характеризуются тем, что при проведении прямых из верхних точек в какую-нибудь из четырех точек нижнего ряда получаются параллельные прямые; эти случаи не дают общих внешних точек для двух негоризонтальных рядов, так как получение этих точек пересечения и делает возможным решение задачи. Таким образом, получены 100 внутренних и 180 смешанных решений задачи Керролла. Нахождение их более экономным путем и поиски новых решений делают эту задачу интересной.

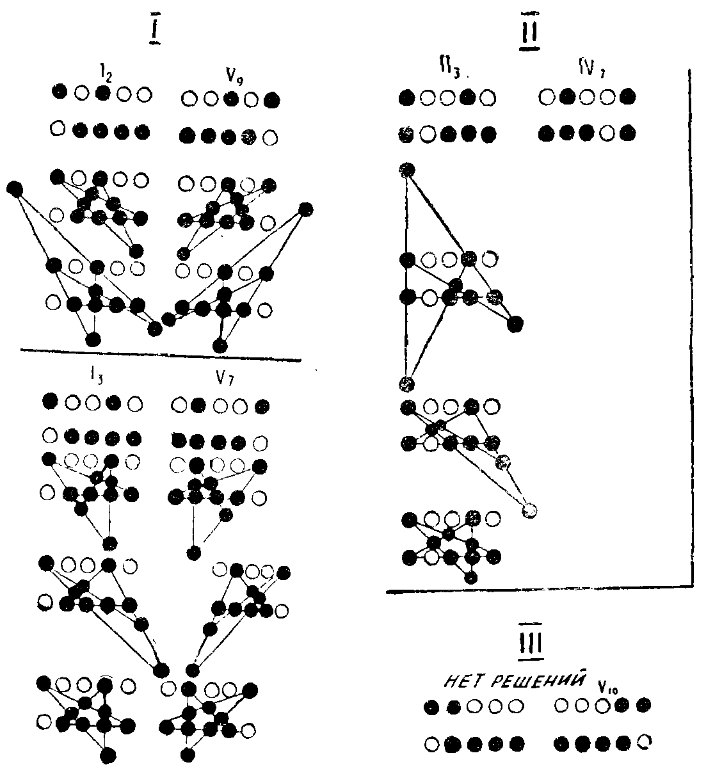
10) Указание: для получения в каждой из комбинаций точек всех возможных решений проводим из первой точки верхнего ряда две прямые всеми возможными способами через две из нижних точек. Обозначая точки нижнего ряда по порядку цифрами 1, 2, 3, 4, имеем следующие случаи для точек нижнего ряда, через которые проходят прямые: 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3, 2, 4; 3, 4. Последний случай дает внутреннее решение всегда, остальные пять могут дать внешнее. Если не

получается параллельных прямых, решение возможно. Наибольшее число их для данной комбинации — 5.

11) Автором этой задачи является профессор математики Оксфордского университета (Англия) Чарлз Доджсон (1832—1898), издавший под именем Льюиса Керролла очень популярные во всем мире детские книги. На русском языке из них неоднократно издавались „Алиса в стране чудес“ и „Алиса в Зазеркалье“.

Эти книги были написаны автором для семилетней девочки Алисы Лиддель. „Ни один английский писатель не доставил столько радостного смеха своей нации“, — пишет один из современных критиков. Остроумие автора выразилось и в тех задачах, которые он составлял для учащихся.

Примеры решения задачи Керролла



Л. Керролл

I. Два примера решения для основного и для симметричного расположения точек.

II. Решение дано для основного расположения. Для симметричного расположения выполните решение для всех случаев.

III. Пример расположения данных точек, для которого нельзя найти смешанного решения. Проверьте это!

РАССКАЗ ПЯТЫЙ

ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1

Четыре ученицы — Мария, Нина, Ольга и Поля — были на соревновании и заняли первые четыре места. На вопрос: которая из них какое место заняла, они дали три разных ответа:

1) Ольга была вторая, Поля — третья;
2) Ольга была первая, Нина — вторая;
3) Мария была вторая, Поля четвертая.

В каждом из этих трех ответов одна часть верна, другая — неверна. Которое место заняла каждая из четырех учениц?

Решение

Положим, что высказывание: „Ольга была вторая“ — верно. Тогда во втором ответе первая часть „Ольга — первая“ неверна и верно высказывание „Нина — вторая“. Но по предположению „Ольга — вторая“ и это предположение невозможно, как приводящее к противоречию.

Итак, в первом ответе верно утверждение: „Поля — третья“. Тогда из третьего ответа следует, что Мария — вторая, из второго ответа, что Ольга — первая и, следовательно, Нина — четвертая.

Проверьте, что в каждом из трех ответов действительно одна часть верна, другая — неверна.

2

О возрасте четырех студенток были даны ответы:

1) Ане 23 года, Марии 22 года;
2) Нине 20 лет, Ане 22 года;

3) Оле 22 года, Нине 19 лет.

Возрасты их различны. В каждом ответе одна часть верна, другая неверна. Найти возраст каждой из студенток.

Решается совершенно так же, как первая задача.

3

Аня, Варя и Клава были на демонстрации одна в красном, другая — в белом, третья — в синем платье. На вопрос, какое на каждой из девушек было платье, был дан ответ:

Аня в красном,

Варя в некрасном,

Клава в несинем.

Из трех частей этого ответа только одна верна.

В каком платье была каждая из девушек?

Решение

1) Предположение „Аня в красном“ невозможно, так как при таком предположении и вторая часть ответа верна („Варя в некрасном“), но по условию задачи из трех частей условного ответа только одна верна.

2) Предположение „Варя в некрасном“ невозможно, так как если это верно, то высказывание „Аня в красном“ должно быть неверно, значит — Аня в некрасном; заявление „Клава в несинем“ должно быть неверно, значит, Клава в синем, то есть Клава в некрасном, и все три девушки оказываются в некрасных платьях, что невозможно.

3) Верной из трех частей ответа может быть только третья: „Клава в несинем“.

Действительно, тогда возможен ответ: Аня в синем, Варя в красном, Клава в белом.

4

Шесть школьников (назовем их *C*, *D*, *G*, *H*, *J*, *T*) ходили на олимпиаду. Задачи решили двое. На вопрос: кто решил, они дали пять разных ответов, заявив, что решили:

1) C и G; 2) D и T; 3) T и C; 4) D и I; 5) H и C.

В четырех из ответов только одна часть верна, в одном из ответов обе части неверны.

Кто из учеников решил задачи?

Решение

Для сокращения письма введем обозначения.

Заявление „ученик C решил задачи" записываем равенством $C=1$; если „C не решил", то $C=0$.

Такие же обозначения употребим относительно каждого школьника.

По смыслу задачи в одном из пяти ответов обе буквы равны нулю (оба ученика не решили задачи), в четырех остальных ответах одна буква равна нулю, другая — единице (один ученик решил, другой не решил).

1) Предположим, что в первом ответе $C=0$, $G=0$. Тогда по третьему и пятому ответам $T=1$ и $H=1$, по второму ответу $D=0$ и по четвертому ответу $I=1$. Оказалось, что три ученика — T, H и I — решили задачи, что противоречит условию. Предположение $C=0$ и $G=0$ невозможно.

2) Предположим, что во втором ответе $D=0$, $T=0$. По третьему и четвертому ответам $C=1$ и $I=1$, по первому ответу $G=0$, по пятому ответу $H=0$.

Из шести учеников решившими задачи оказываются только двое: C и I.

Все другие предположения приводят к недопустимым ответам, — что задачи решили более чем двое учащихся.

Задачи решили ученики C и I.

5

Четыре девушки, назвавшиеся „марсианками", на вопрос о их возрасте дали ответы:

1) Ми — 22 года, Ме — 21 год;
2) Мо — 19 лет, Ми — 21 год;
3) Ма — 21 год, Мо — 18 лет.

Все „марсианки" разных возрастов.

В каждом из трех ответов одна часть верна, другая — неверна.

6

В велогонке участвовали 5 учащихся и заняли первые 5 мест. На вопрос: „Которое кто из них занял место?" — были даны ответы:

1) Сережа второе, Коля третье;
2) Надя третье, Толя пятое;
3) Толя первое, Надя второе;
4) Сережа второе, Ваня четвертое;
5) Коля первое, Ваня четвертое.

В каждом ответе одна часть верна, другая неверна. Кто какое место занял?

7

В журнале „Техника — молодежи" (№ 5 за 1960 г.) была предложена задача.

При решении некоторой задачи ученики дали три разных ответа:

1) x есть число иррациональное, равное площади правильного треугольника, у которого сторона $a=2$;
2) x кратно числу 4 и равно радиусу окружности, длина которой 2;
3) x меньше трех и равно диагонали квадрата, сторона которого 2.

В каждом из трех ответов одна часть верна, другая неверна.

Чему равно x?

Задача доступна учащимся VIII класса.

Решение

Упростим выражение вторых частей ответов.

1) Площадь правильного треугольника, сторона которого равна 2, есть $\frac{2^2}{4}\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

2) Радиус окружности, длина которой 2, получим так:

$$2\pi r=2,\ r=\frac{1}{\pi}.$$

3) Диагональ квадрата, сторона которого равна двум, есть $2\sqrt{2}$.

После этого условные ответы можно выразить так:

1) x есть число иррациональное, равное $\sqrt{3}$;

2) x кратное четырем и равно $\frac{1}{\pi}$;

3) $x < 3$ и равно $2\sqrt{2}$.

1) Искомое число x не может равняться $\sqrt{3}$, так как при $x=\sqrt{3}$ мы имели бы в первом условном ответе обе части верными: $x=\sqrt{3}$, и оно есть число иррациональное. По условиям задачи верной может быть только одна часть ответов.

2) Третий ответ также невозможен, так как $2\sqrt{2}=2{,}8\ldots$ и меньше 3, поэтому при предположении $x=2\sqrt{2}$ в третьем условном ответе обе части были бы верны, что противоречит условию задачи.

3) Второй условный ответ удовлетворяет условиям задачи: если $x=\frac{1}{\pi}$, то первая часть второго условного ответа „x кратное числа 4" неверна, так как кратным числа 4 может быть только целое число.

$$\text{Итак, } x=\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3{,}14\ldots}$$

Этот ответ удовлетворяет всем трем условиям:

1) $\frac{1}{\pi}$ число иррациональное, но не равно $\sqrt{3}$; в первом условном ответе первая часть верна, вторая неверна;

2) во втором условном ответе вторая часть верна $\left(x=\frac{1}{\pi}\right)$, первая неверна, $\frac{1}{\pi}$ не является кратным числа 4;

3) в третьем условном ответе первая часть верна: $\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3{,}14\ldots}<3$, но вторая часть неверна:

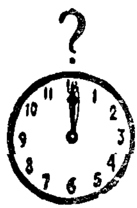
$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3{,}14\ldots}\neq 2\sqrt{2}.$$

Задачи этого параграфа и подобные им можно решать логическими уравнениями. Сведения о таких уравнениях вы найдете в книге: И. Я. Депман. „Первое знакомство с математической логикой". Ленинград, 1963.

РАССКАЗ ШЕСТОЙ

Задача о движении часовых стрелок и сходные с ней

1. ЗАДАЧА О СТРЕЛКАХ ЧАСОВ



В какие моменты в течение 12 часов, начиная с 0 часов 0 минут, минутная стрелка покрывает часовую? Арифметическое решение задачи требует отдельного вычисления для каждого часа.

В первый час совпадение стрелок было в 0 часов 0 минут.

Для второго часа рассуждаем так. В 1 час 0 минут минутная стрелка стоит над нулевой отметкой деления круга циферблата, часовая — над пятой минутной отметкой или часовой отметкой I. Для совпадения стрелок минутная стрелка должна пройти $5+x$ минутных делений, часовая стрелка — x делений. Так как минутная стрелка движется в 12 раз скорее часовой и стрелки двигались от момента 1 час 0 минут одинаковое время, то $5+x=12x$, откуда $11x=5$, $x=\frac{5}{11}$ делений циферблата. Минутная стрелка после 1 часа 0 минут прошла $5\frac{5}{11}$ делений, что соответствует моменту времени 1 час $5\frac{5}{11}$ минуты.

Для второго часа получим аналогично:

$10+y=12y,\ 11y=10,\ y=\frac{10}{11}$ делений циферблата.

Минутная стрелка после 2 часов 0 минут прошла $10\frac{10}{11}$ делений циферблата, что соответствует моменту времени 2 часа $10\frac{10}{11}$ минуты.

Вычисляя таким же образом моменты совпадения стрелок для каждого из следующих часов, получим таблицу покрытий минутной стрелкой часовой:

Точные			Округленные		
0 час.	0	мин.	0 час.	0	мин.
1 час	$5\frac{5}{11}$	мин.	1 час	5,4	мин.
2 час.	$10\frac{10}{11}$	мин.	2 час.	10,9	мин.
3 час.	$16\frac{4}{11}$	мин.	3 час.	16,4	мин.
4 час.	$21\frac{9}{11}$	мин.	4 час.	21,8	мин.
5 час.	$27\frac{3}{11}$	мин.	5 час.	27,3	мин.
6 час.	$32\frac{8}{11}$	мин.	6 час.	32,7	мин.
7 час.	$38\frac{2}{11}$	мин.	7 час.	38,2	мин.
8 час.	$43\frac{7}{11}$	мин.	8 час.	43,6	мин.
9 час.	$49\frac{1}{11}$	мин.	9 час.	49,1	мин.
10 час.	$54\frac{6}{11}$	мин.	10 час.	54,5	мин.
11 час.	60	мин.	11 час.	60	мин.

Последний момент совпадения положения стрелок является одновременно моментом совпадения для двенадцатого часа и следующего за ним первого часа.

Таблица показывает, что совпадения положений стрелок происходят через каждые $65\frac{5}{11}$ минуты: между двумя совпадениями положений стрелок минутная стрелка проходит x делений, часовая стрелка $x-60$ делений, двигаясь в 12 раз медленнее.

$$\frac{x}{12}=x-60, \quad x-\frac{x}{12}=60, \quad \frac{11}{12}x=60, \quad x=65\frac{5}{11}.$$

Алгебраическое решение задачи для любого часа

В какой момент между четырьмя и пятью часами минутная стрелка покрывает часовую? Положим, что это будет x минут после того, как минутная стрелка была на IV.

Часовая стрелка после четырех часов прошла x делений (минутных), минутная стрелка $20+x$ делений. Так как скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой стрелки, то и путь, пройденный минутной стрелкой, в 12 раз больше пути, пройденного часовой стрелкой:

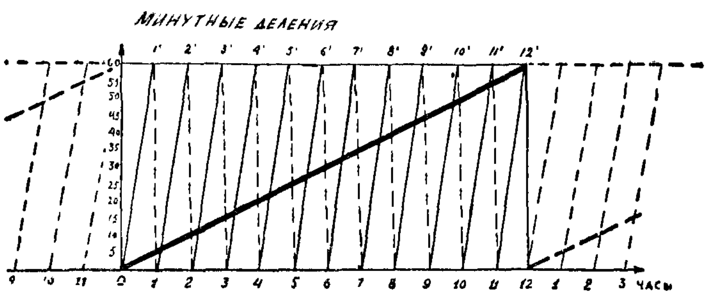
$$20+x=12x,\quad x=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}\ .$$

Покрытие минутной стрелкой часовой было в 4 часа $+$ $+\left(20+1\frac{9}{11}\right)$ мин. $=$ в 4 часа $21\frac{9}{11}$ мин.

Графическое решение задачи

Отложим на оси x (оси абсцисс) часы от 1 до 12, на оси y (оси ординат) — деления циферблата часов, выражающие минуты для полученного момента времени. График положения часовой стрелки изображается прямой, идущей от точки (0; 0) к точке (12; 60), как график равномерного движения прямо пропорциональной зависимости y от x.

График положения минутной стрелки за каждый



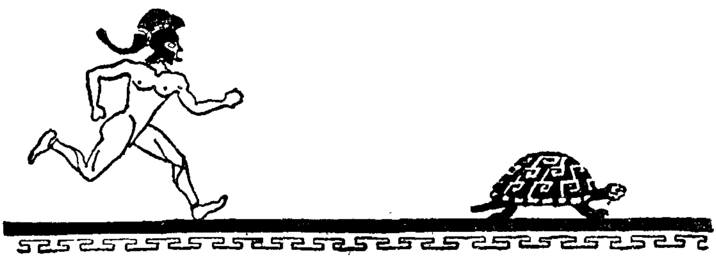
отдельный час изображается прямыми, идущими от точки (0; 0) к точке (1; 60) для первого часа, от точки (1; 0) к точке (2; 60) для второго часа и так далее (за каждый час минутная стрелка равномерно проходит от нулевого деления до шестидесятого).

Моменты совпадения стрелок соответствуют на чертеже точкам пересечения графика движения часовой стрелки (жирной наклонной) с графиком движения минутной стрелки (12 тонких наклонных). При аккуратном построении графиков и при больших размерах чертежа можно из него получить те округленные значения моментов совпадения стрелок, которые даны во втором столбце нашей таблицы; полные часы для определенного момента берутся по оси часов, минуты — по числу делений от оси x до точки пересечения обеих наклонных. Так, между 9 и 10 часами находим, что в полосе между 9 и 10 часами по оси x наклонные пересекаются в точке на расстоянии 49 с небольшим делений от оси x, что дает для момента совпадения стрелок 9 часов 49, 1 минуты. Сделайте чертеж на миллиметровой бумаге!

2. ЗАДАЧА ОБ АХИЛЛЕСЕ И ЧЕРЕПАХЕ

Задача о стрелках часов сходна с одной древней задачей.

Быстроногий сказочный герой Ахиллес бежит в 10 раз скорее черепахи. Может ли он догнать черепаху, если в начале бега расстояние между ними равняется некоторой единице расстояния, например одному километру?



Решение

Правильным кажется следующее рассуждение.

За время, в которое Ахиллес пробежит километр, черепаха уйдет вперед на $\frac{1}{10}$ *км*, пока Ахиллес пробежит эту $\frac{1}{10}$ *км*, черепаха уйдет вперед на $\frac{1}{100}$ *км*, пока Ахиллес пройдет эту $\frac{1}{100}$ *км*, черепаха уходит на

$\frac{1}{1000}$ *км*, и так далее. Может показаться, что Ахиллес никогда черепаху не догонит, так как всегда как будто остается между ними некоторая, пусть малая, доля первоначального расстояния.

Путь, который должен пробежать Ахиллес, чтобы догнать черепаху, равен

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots$$

(дробные слагаемые продолжены до бесконечности) или 1,111..., или $1\frac{1}{9}$, или $\frac{10}{9}$ частей начального расстояния между бегущими (предполагается читателю известным равенство $0{,}111\ldots=\frac{1}{9}$).

Если начальное расстояние было a, а скорость Ахиллеса v метров в минуту, то он, чтобы догнать черепаху, должен пробежать $\frac{10}{9}\,a$, для чего ему понадобится $\frac{10}{9}\,a : v$ единиц времени. Так, например, если начальное расстояние было $a=300$ *м* и скорость Ахиллеса 100 метров в минуту, то Ахиллес догонит черепаху через

$$\frac{10\cdot300}{9\cdot100}=\frac{10}{3}=3{,}333\ldots\approx3\frac{1}{3}\text{ мин.}$$

В вопросе о стрелках часов мы имеем ту же задачу.

В 0 часов 0 минут минутная и часовая стрелки совпадали. Чтобы вновь покрыть часовую стрелку, минутная стрелка должна пробежать один полный оборот и затем $\frac{1}{12}$ его, которую за это время прошла часовая стрелка; пока минутная стрелка пройдет эту $\frac{1}{12}$ оборота, часовая ушла вперед на $\frac{1}{12^2}$ часть оборота, и так далее, как в задаче об Ахиллесе и черепахе.

Минутная стрелка, чтобы догнать часовую, должна пройти

$$1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\ldots$$

полного оборота. В курсе IX класса вы узнаете, что

$$1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\ldots=\frac{12}{11}.$$

Минутная стрелка делает один оборот в час; для прохождения $\frac{12}{11}$ оборотов ей нужно $\frac{12}{11}$ или $1\frac{1}{11}$ часа, или 1 час $5\frac{5}{11}$ минуты.

3. ЕЩЕ ЗАДАЧА ЭТОГО РОДА

Одна фабрика в дореволюционной России выпустила в продажу дорогие коробки шоколада с вложенным в коробку талоном.

За десять накопленных покупателем талонов магазины выдавали бесплатно коробку шоколада.

Какую часть стоимости шоколада, содержащегося в каждой коробке, составляет стоимость талона?

Решение

На первый взгляд может показаться, что талон имеет ценность 0,1 части шоколада. Это неверно: ценность талона равна 0,1 части ценности коробки, содержащей вместе с шоколадом и талон.

Обозначим стоимость чистого шоколада в коробке единицей, стоимость талона через x (это некоторая доля единицы).

По условию за 10 талонов можно получить коробку шоколада, значит

$$10x = 1 + x, \text{ откуда } 9x = 1, \; x = \frac{1}{9}.$$

Ценность каждой коробки шоколада равна $1 + x = \frac{9}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Если коробка стоит 1 рубль, то $\frac{10}{9}$ стоимости шоколада равны 100 коп., $\frac{9}{9}$ — стоимость чистого шоколада — 90 коп.

Проверка решения: покупатель накопил 9 талонов из 9 коробок, за которые уплатил 9 рублей. Он спрашивает в магазине десятую коробку, вынимает из нее талон, отдает в кассу 10 талонов и получает десятую коробку без приплаты. За 9 рублей он получил 10 порций шоколада, одна порция обошлась покупателю в 90 копеек.

Числу x, равному $\frac{1}{9}$, можно дать другое выражение:

$10x = 1 + x,$

$x = \frac{1}{10} + \frac{x}{10},$

$\frac{x}{10} = \frac{1}{100} + \frac{x}{100} = \frac{1}{10^2} + \frac{x}{10^2},$

$\frac{x}{10^2} = \frac{1}{10^3} + \frac{x}{10^3},$

. . . .

Подставляя в каждое из равенств вместо вторых слагаемых правых частей правые части следующих равенств (вместо x подставим $\frac{1}{10} + \frac{x}{10}$, вместо $\frac{x}{10}$ подставим $\frac{1}{10^2} + \frac{x}{10^2}$ и так далее), получим:

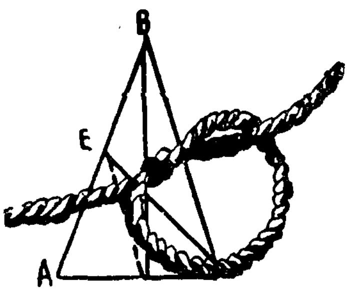
$$x = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \frac{x}{10^n}.$$

Так как $x = \frac{1}{9}$, то при n, возрастающем неограниченно, $\frac{x}{10^n}$ подойдет сколь угодно близко к нулю; $x = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots$ (при неограниченном возрастании числа слагаемых). Отсюда, так как $x = \frac{1}{9}$, имеем $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots = 0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$.

РАССКАЗ СЕДЬМОЙ

о том, как задача, не имеющая отношения к геометрии, разъяснила способ решения геометрических задач на построение

СЛУЧАЙ В КЛАССЕ ВЗРОСЛЫХ



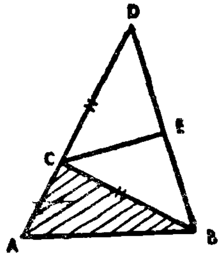
Автор книги преподавал взрослым людям начала геометрии. Нужно было разъяснить классу способ решения задач на построение.

Учебник рекомендует поступать так: предполагаем, что задача решена — что требуемое построение выполнено, — и посмотрим, как от построенной фигуры прийти к данным задачи, чтобы затем обратным переходом прийти от данных задачи к требуемой фигуре.

Простой пример

Нужно построить треугольник по основанию, углу при основании в сумме двух других сторон.

Предполагаем, что задача решена, то есть, что мы получили треугольник ABC, имеющий данное основание $AB = a$, данный угол при основании $CAB = b$, и известна сумма сторон $AC + CB = l$. Если продолжить AC за точку C на расстояние CB, то имеем $AD = l$. Фигуру DAB можно построить по данным задачи. Остается найти такую точку C на AD, чтобы $DC = CB$. Соединив точки D и B прямой и предполагая, что



точка C найдена, получим равнобедренный треугольник BDC. Зная, что во всяком равнобедренном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины на основание, делит основание пополам, мы из точки E, середины отрезка DB, восставим перпендикуляр. Пересечение его с отрезком AD и даст нам точку C. Требуемый треугольник построен.

Ни объяснение, ни примеры не убедили класс в том, что такой способ решения задач имеет какое-либо значение. Учащиеся указывали, что предлагаемый способ решения, переведенный на житейский язык, означает следующее: мне нужно добыть 1000 рублей, для этого мне предлагают предполагать, что 1000 рублей как-то добыты (предполагать, что задача решена), а затем подумать, как эту сумму добыть. По мнению учащихся, предположение о том, что задача решена, никакого облегчения для поисков решения не дает, и что для каждой задачи нужно просто догадаться, как построить требуемую фигуру. Для разъяснения смысла способа решения и для убеждения учащихся в пользе его преподаватель предложил решить следующую задачу.

ЗАДАЧА О ЗАВЯЗЫВАНИИ УЗЛА

На столе лежит кусок веревки, вытянутый по прямой. Надо взять его одной рукой за один, другой рукой за другой конец и, не выпуская концов веревки из рук, завязать узел.

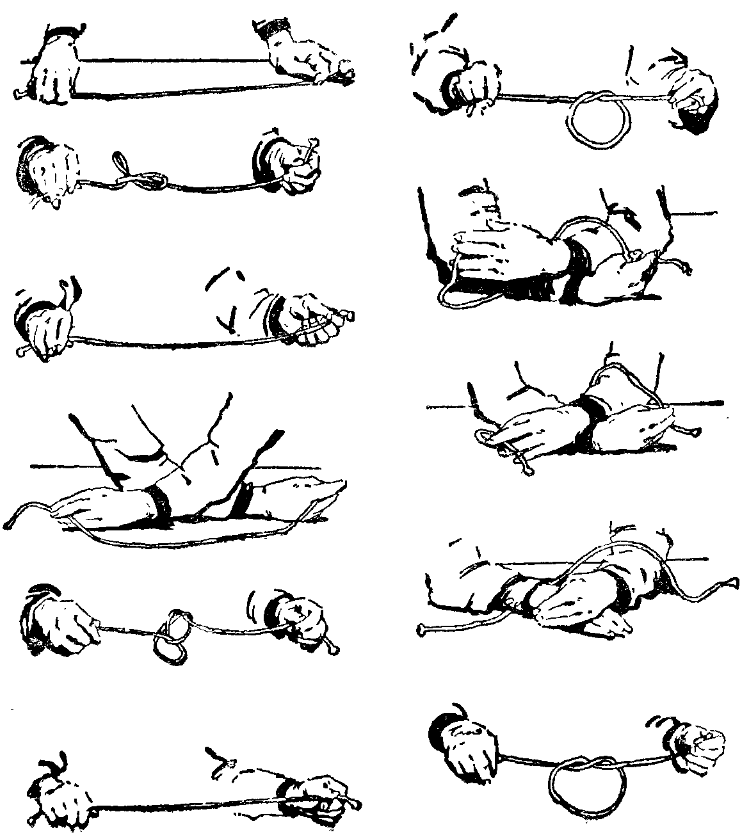
Сразу нашлись охотники выполнить это. Когда они брали левой рукой за левый конец веревки, правой рукой за правый конец, узла завязать не удалось. Так же не удалось завязать узел и в том случае, когда правой рукой брали за левый конец веревки и левой рукой за правый конец.

После ряда попыток задача была классом признана невозможной.

Левый столбец изображений нашего рисунка показывает попытки связать узел, не приведшие к решению задачи.

Тогда классу было предложено попробовать решить ее указанным геометрическим способом.

Предположим, что задача решена, то есть, что узел на веревке сделан и концы веревки находятся в руках и не выпускаются (первый сверху рисунок правого столбца). Попытаемся от решенной задачи вернуться к ее данным, именно, что веревка лежит, вытянутая на столе, и концы ее не выпускаются из рук (второй рисунок правого столбца). Если выпрямить веревку сколько возможно, не выпуская концов ее из рук, то



оказывается, что левая рука, идя под вытянутой веревкой и над правой рукой, держит правый конец веревки; правая рука, идя над веревкой и под левой рукой, держит левый конец веревки.

После этого решение задачи очень легко выполнимо.

Веревка лежит на столе; положив над веревкой правую руку, берем ею за левый конец веревки; засовываем левую руку под веревку и над правой рукой берем ею за правый конец веревки. Не выпуская концов веревки из рук, разведем руки (рисунок третий и четвертый правого столбца). На веревке оказался узел, завязанный при выполнении всех условий задачи (последний рисунок).

Эта задача, которая как будто не имеет никакого отношения к способу решения геометрических задач на построение, убедила учащихся в том, что предлагаемый учебником геометрии способ решения этих задач действительно помогает найти решение.

Способ решения геометрических задач на построение, исходящий из предположения о том, что задача решена, приписывается древнегреческому философу Платону, жившему в V—IV веках до начала нашего летосчисления, то есть почти две с половиной тысячи лет назад.

Решение задачи-фокуса о завязывании узла совершенно точно соответствует смыслу указанного способа решения геометрических задач на построение.

Решите указанным способом следующие задачи.

ЗАДАЧА 1

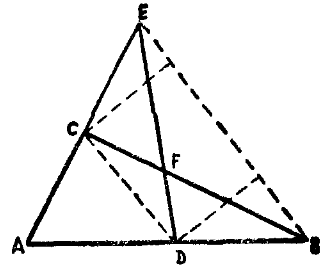
Преобразовать данный треугольник ABC в равновеликий ему, с другим основанием AD и с тем же углом A при основании.

Решение

Пусть дан треугольник ABC. Предположим, что равновеликий с ним будет $\triangle ADE$.

Соединим точку E с точкой B и точку C с точкой D.

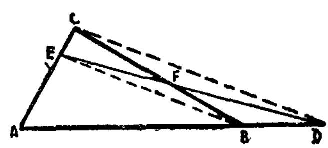
Вопрос задачи сводится к нахождению точки E. Она была бы найдена, если бы можно было установить, что $BE \parallel CD$, так как достаточно было бы провести из точки B прямую, параллельную отрезку DC, который известен.



Из предположения о том, что треугольники ABC и ADE равновелики, следует, что треугольники DBF и CFE равновелики, так как они, прибавленные к четырехугольнику $ADFC$, дают равновеликие треугольники ABC и ADE. Эти равновеликие треугольники DBF и CFE после присоединения к каждому из них в отдельности треугольника BEF дают равновеликие треугольники DBE и CBE. У последних основание общее — BE. Так как площади их равны, то и высоты этих треугольников равны. Вершины треугольников лежат на прямой DC. Она параллельна EB.

Решение задачи: имеем треугольник ABC; дан конец нового основания D; соединим точку D с точкой C; продолжим сторону AC за точку C; из точки B проводим линию параллельно DC; точка пересечения ее с продолжением стороны треугольника AC, точка E, будет искомой вершиной треугольника, равновеликого данному ABC.

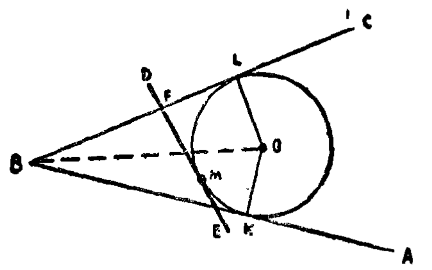
Задача всегда возможна и имеет единственное решение.



Усвоив решение задачи по первому чертежу, в случае, когда основание искомого треугольника AD меньше основания данного треугольника AB, выполните, не заглядывая в книгу, построение для того случая, когда основание искомого треугольника AD больше, чем основание данного треугольника AB (второй чертеж).

ЗАДАЧА 2

Даны угол ABC и точка D на плоскости угла. Требуется провести через точку D прямую, отсекающую



от угла ABC треугольник, периметр которого имеет данную длину $2p$.

Решение

Предположим, что задача решена, что треугольник BEF — искомый, в котором продолжение стороны EF проходит через точку D и периметр которого равен данному числу $2p$, то есть

$$BE+EF+FB=2p.$$

Проведем окружность, касательную к EA, EF и FC (она называется вневписанной окружностью треугольника BEF). Такая окружность единственная; центр ее находится в точке пересечения бисекторов углов CFE и FEA. Пусть точками касания окружности с данными прямыми будут K, L и M. Так как $FL=FM$ и $EM=EK$ (свойство отрезков касательных, проведенных из данной точки к данной окружности), то $BE+EF+FB=$ $=BE+EM+MF+FB=BE+EK+FL+FB=BK+$ $+BL=2p$.

Треугольники BOL и BKO равны, отрезок $BK=$ $=BL=p$. Решение задачи свелось к проведению окружности, касающейся сторон данного угла в точках K и L ($BK=BL=p$), и проведению из точки D касательной к построенной окружности.

Построение

Отложим на сторонах данного угла отрезки $BK=$ $=BL=p$ и из точек K и L восставим перпендикуляры KO и LO, пересекающиеся в точке O. Из точки O радиусом OK или OL проведем окружность и из точки D — касательную к меньшей части этой окружности.

Задача имеет одно решение, если точка D находится вне данного угла и вне угла, вертикального данному, или на отрезках BL или BK, или на меньшей дуге, исключая точки B, K, L. Задача имеет два решения, если точка D находится внутри фигуры, ограниченной отрезками BK, BL и меньшей дугою. В остальных случаях задача решения не имеет.

Сделайте построение для всех перечисленных случаев.

ЗАДАЧА 3

Прием решения, который показан в предыдущих задачах и который состоит в том, что задача предполагается решенной, широко применяется в геометрических задачах на построение. Но он является приемом решения не только геометрических задач, как это обычно думают учащиеся.

Решение задач при помощи уравнений по существу применяет то же рассуждение: мы предполагаем, что требуемый ответ уже существует, обозначаем его через x или x и y, устанавливаем зависимость между искомым числом и данными задачи (составляем уравнение или уравнения) и, решая уравнения, вычисляем x, то есть переходим от данных в задаче чисел к искомым.

Покажем на следующем примере, что этот прием бывает полезен и при решении арифметических вопросов.

Доказать, что куб всякого натурального числа есть разность квадратов двух натуральных чисел (прибавляя к последним и 0):

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 = 1^2 - 0^2 \\ 2^3 &= 8 = 3^2 - 1^2 \\ 3^3 &= 27 = 6^2 - 3^2 \\ 4^3 &= 64 = 10^2 - 6^2 \qquad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Доказательство I

Для любого натурального числа n имеем

$$\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} - \frac{n^4-2n^3+n^2}{4} = n^3,$$

то есть

$$n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2;$$

$\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$ — целые числа и при четном и при нечетном n. Пример:

$$11^3 = 1331 = \left(\frac{11^2+11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11^2-11}{2}\right)^2 = 66^2 - 55^2 = 1331.$$

Для доказательства нужно было догадаться взять числа $\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$ и проверить, что разность их квадратов есть n^3. Нельзя ли каким-нибудь рассуждением прийти к заключению, что именно числа $\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$ годятся для нашей цели?

Доказательство II

Можно рассуждать так.

Предположим, что куб числа n есть разность квадратов двух чисел x и y:

$$n^3 = x^2 - y^2.$$

Разложив правую часть равенства на множители, имеем:

$$n^3 = (x-y)\ (x+y).$$

Этому равенству, которое можно записать в виде

$$n \cdot n^2 = (x-y)\ (x+y),$$

можно удовлетворить, предполагая

$$n = x - y,$$
$$n^2 = x + y.$$

Складывая почленно уравнения, имеем

$$x = \frac{n^2+n}{2};$$

вычитая уравнения почленно, получаем

$$y = \frac{n^2-n}{2}$$

и

$$n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^3 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2.$$

$\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$ всегда будут целыми числами: если n четное, то и n^2 четное, и числители обеих дробей четные; если n нечетное число, то квадрат его также является нечетным числом, а сумма и разность двух нечетных чисел всегда является четными числами.

Доказательство I есть пример **синтетического**, доказательство II—**аналитического** доказательства.

РАССКАЗ ВОСЬМОЙ

Задачи о слове „алгебра“

а. АЛГЕБРА — ВОССТАНОВЛЕНИЕ

Слово „алгебра“ имеет корень gebr — джебр — гебр. От этого корня произведено арабское слово „al gebr“ — алджебр — восстановление. Алгеброю назвал созданное им учение о решении арифметических задач среднеазиатский математик начала девятого века нашего летосчисления Мухаммед бен Муса ал Хорезми. Это и есть наша школьная алгебра.

Словом „алгебра“ в арабском языке называлось искусство врача восстанавливать сломанную руку или ногу. Хирург у арабов, как и у испанцев, называется алгебристом.

Название нового учения алгеброй — восстановлением — основано на том, что при переносе числа с минусом перед ним (вычитаемого) из одной части равенства в другую оно становится положительным числом.

Число с минусом перед ним (отрицательное число) во времена Мухаммеда и еще долго после этого не имело смысла. Таким образом, выражение вроде (— 3), не имевшее смысла, при переносе становилось числом 3, из символа — 3 „восстановилось“ число 3.

Согласно такому объяснению происхождения названия „алгебра“, математика позаимствовала это слово из медицины.

В самое последнее время указано, что арабы получили слово „алджебр“ из вавилонского языка, в котором оно означало математическое понятие.

6. АМПУТАЦИЯ АЛГЕБРЫ

Заменить цифрами (восстановить) буквы в следующих равенствах:

$$\overline{algebr} = \overline{br}^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$\overline{lgebr} = br^5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$\overline{gebr} = \overline{br} \cdot r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3) \qquad (*)$$
$$\overline{ebr} = b \cdot r^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

„Ампутация“ — медицинский термин, означающий „отрезание“. В нашей задаче в слове „algebr“ последовательно отрезаются (ампутируются) первые буквы.

Напомним, что соединение букв, покрытых чертой, означает многозначное число, для которого буквы служат цифрами отдельных разрядов. Так:

$$\overline{algebr} = a \cdot 10^5 + l \cdot 10^4 + g \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + b \quad 10 + r,$$
$$\overline{lgebr} = l \cdot 10^4 + g \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + b \cdot 10 + r,$$

. . . .

$$\overline{br}^3 = (b \cdot 10 + r)^3,$$
$$\overline{br} = b \cdot 10 + r.$$

Решение

1) Дано, что имеем 6-, 5-, 4-, 3-значные числа; ни одна из букв слова *algebr* не означает нуля.

2) $\overline{br}^3 = (10b + r)^3 = 1000 \quad b^3 + 3 \cdot 100 \quad b^2 \quad r + 3 \cdot 10\ br^2 + r^3$; последнюю цифру $\overline{br}^3$ дает r^3; в левой части равенства (1) последней цифрой числа $\overline{algebr}$ является r. Следовательно, r есть такая цифра, куб которой оканчивается тою же цифрою. Таковыми являются: $1^3 = 1$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $9^3 = 729$; r есть одна из цифр 1, 4, 5, 6, 9.

3) Испытаем, какая из этих пяти цифр удовлетворяет данным условиям.

а) Положим, что $r = 1$.

Тогда из четвертого равенства (*) имеем $\overline{eb1} = b$, что невозможно, так как $\overline{eb1}$ трехзначное число, b — однозначное $\boxed{r \neq 1}$;

б) положим, что $r=9$.

Тогда четвертое равенство примет вид $\overline{eb9}=b\cdot 9^3=$ $=729b$; $\overline{eb9}$ — трехзначное число; в правой части $729\cdot b$ должно быть также трехзначным; b может быть только 1, так как 729. 2 уже четырехзначно. Но b не может быть 1, так как при таком предположении равенство (4) примет вид $\overline{e19}=729$, что невозможно ни при каком e; итак $\boxed{r\neq 9}$;

в) положим, что $r=4$.

При таком предположении равенство (4) будет

$$\overline{eb4}=b\cdot 4^3=b\cdot 64.$$

Чтобы число $b\cdot 64$ оканчивалось четверкой, b должно быть или 1 или 6. Если $b=1$, то трехзначное число $\overline{e14}=64$, что невозможно. При $b=6$ имели бы $\overline{e64}=384$, что также невозможно ни при каком значении e; значит $\boxed{r\neq 4}$;

г) положим, что $r=6$.

При таком предположении равенство (2) примет вид $\overline{lgeb\ 6}=b\ \ 6^5=7776\cdot b$ и произведение это должно оканчиваться цифрою 6. Это возможно только при $b=1$ или $b=6$. Но $b\neq 1$, так как пятизначное число $\overline{lgeb\ 6}$ не может равняться четырехзначному 7776; $b\neq 6$, так как по предположению $r=6$; это предположение невозможно $\boxed{r\neq 6}$.

д) для r остается единственное из допустимых значений $\boxed{r=5}$.

4) b должна быть нечетной цифрой, так как при b четной из (2) и (4) следует $r=0$, что исключено.

Для b остаются допустимые значения 1, 3, 7, 9. Проверим возможность каждого из этих значений:

а) при предположении $b=1$ имели бы из равенства (4) $\overline{e15}=125$, что невозможно.

б) при предположении $b=3$ из того же равенства имели бы $\overline{e35}=3\cdot 125=375$, что также невозможно.

в) при предположении $b=9$ равенство (4) дает $\overline{e95}=9\ .\ 125=1125$, невозможное равенство.

Остается единственное допустимое значение

$$\boxed{b=7}\,.$$

Подстановка значений $r=5$ и $b=7$ в равенствах (*) подтверждает правильность решения:

$$\begin{aligned} 75^3 &= 421875 \\ 7\cdot 5^5 &= 21875 \\ 75\cdot 5^2 &= 1875 \\ 7\cdot 5^3 &= 875 \end{aligned}$$

В. ЗАДАЧА ОБ АЛДЖЕБР („ВОССТАНОВЛЕНИИ“)

Решим задачу, которая в буквальном смысле слова занимается „восстановлением“:

$$\begin{array}{r|l} UUSS & \underline{EMA} \\ \underline{MAS} & MT \\ OSS & \\ \underline{IAS} & \\ AS & \end{array}$$

„Восстановить“ числовые значения букв в записи, в которой каждая буква заменяет определеиную цифру.

Решение

При первом вычитании $S-S=S$; S может быть только цифрою 0: $\boxed{S=0}$.

В произведениях A на M и A на T последняя цифра S, то есть 0. Это возможно только при $\boxed{A=5}$. M и T — четные цифры, какие-то из цифр 2, 4, 6, 8. Можно убедиться, что $\boxed{M=2}$, так как при предположении $M=4$ произведение $\overline{E45}$ на 4 не может дать число MAS, равное 450. Так же можно убедиться, что $M\neq 6$, $M\neq 8$.

Вставим найденные цифры в запись задачи:

$$\begin{array}{r|l}
UU00 & E25 \\ \cline{2-2}
250 & 2T \\ \cline{1-1}
O00 & \\
J50 & \\ \cline{1-1}
50 &
\end{array}$$

Ясно: $\boxed{E=1}$ и $U \neq 2$ (так как $M=2$); при первом вычитании в остатке сотен нет, значит, от U сотен была занята одна сотня при вычитании десятков; значит, $\boxed{U=3}$ и $\boxed{O=8}$.

Из второго вычитания следует, что $\boxed{J=7}$ и $\boxed{T=6}$.

П р о в е р к а:

$$\begin{array}{r|l}
3300 & 125 \\ \cline{2-2}
250 & 26 \\ \cline{1-1}
800 & \\
750 & \\ \cline{1-1}
50 &
\end{array}$$

„Будет хорошо“, — как писал египетский вычислитель 4000 лет назад после каждой проверки.

РАССКАЗ ДЕВЯТЫЙ

О решении задач при помощи уравнений

Это основной способ решения алгебраических задач. Как уже было отмечено, главная трудность здесь может возникнуть только при составлении уравнения.

Дадим несколько примеров составления и решения уравнений.

1) ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО

„Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг, после чего одна половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру; вторая же половина перешла косить второй луг, где к вечеру остался участок, который мог быть скошен одним косцом за день.

Сколько косцов было в артели?“

Первый способ решения

Предположим, что число косцов x.

Оба луга были скошены при работе всей артели в течение дня и еще одного косца в течение второго дня. Чтобы скосить оба луга, потребовался бы одному косцу $x+1$ рабочий день. Чтобы скосить малый луг, составляющий $\frac{1}{3}$ обоих лугов, требуется $\frac{x+1}{3}$ рабочих дней. С другой стороны, для того чтобы скосить малый луг, половина артели работала половину дня (то есть $\frac{x}{2}$ косцов $\frac{1}{2}$ дня), иными словами, требовалась работа за $\frac{x}{4}$ рабочих дня и одного косца за целый день, так что всего косьба малого луга потребовала $\left(\frac{x}{4}+1\right)$ рабочих дней. Значит,

$$\frac{x+1}{3}=\frac{x}{4}+1,$$

откуда

$$x=8.$$

Второй способ составления уравнения

Установив, что косьба обоих лугов потребовала $x+1$ рабочих дней, мы можем найти два выражения для числа дней работы на большом лугу и, приравняв эти выражения, получить уравнение для определения x.

Так как большой луг составляет $\frac{2}{3}$ обоих лугов, то его можно было скосить в

$$\frac{2\,(x+1)}{3}\ \text{дней.}$$

Косила же его вся артель $\frac{1}{2}$ дня, что дает $\frac{x}{2}$ рабочих дней, и половина артели $\frac{1}{2}$ дня, что дает еще $\frac{x}{4}$ рабочих дней; всего, для того чтобы скосить большой луг, потребовалось $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$ рабочих дней. Имеем уравнение:

$$\frac{2}{3}\,(x+1)=\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$$

$$\text{и}\ x=8.$$

Третий способ составления уравнения

Чтобы скосить малый луг, потребовалось $\frac{x}{4}+1$ рабочих дней одного косца; для большого луга это число было $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$. Малый луг в два раза меньше большого; таково же будет и отношение чисел рабочих дней.

$$\left(\frac{x}{4}+1\right):\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)=1:2;$$

$$2\left(\frac{x}{4}+1\right)=\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\,,\quad x=8.$$

Многие задачи могут быть решены уравнениями разного вида.

Решение при помощи введения новой неизвестной

Нередко при решении задач с помощью уравнений бывает полезно ввести новую неизвестную, значения которой по смыслу задачи находить не нужно, но которая облегчает составление уравнения.

Обозначим по-прежнему число косцов через x. Обозначим буквой y величину участка, скашиваемого одним косцом за день.

На большом лугу косили x косцов $\frac{1}{2}$ дня и $\frac{x}{2}$ косцов $\frac{1}{2}$ дня; величина большого луга

$$y\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right) \text{ или } \frac{3xy}{4}.$$

На малом лугу косили $\frac{x}{2}$ косцов $\frac{1}{2}$ дня и один косец целый день; величина малого луга

$$y\left(\frac{x}{4}+1\right)=\frac{xy}{4}+y, \text{ или } \frac{xy+4y}{4}.$$

Так как большой луг в два раза больше малого, то

$$\frac{3xy}{4}:\frac{xy+4y}{4}=2,$$

$$\frac{3x}{x+4}=2,$$

$$x=8.$$

2. ЗАДАЧА НЬЮТОНА

Введением вспомогательной неизвестной решается задача, получившая название „задачи Ньютона".

„Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и одинаковой скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$, 10 и 24 акра (1 акр равен 0,405 гектара). Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель, второй — 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?"

Решение

Берем за вспомогательную неизвестную y первоначальный запас травы, прирастающей на 1 акре в течение недели. На первом лугу за неделю прирост травы будет $3\frac{1}{3}\ y$, а в течение 4 недель $3\frac{1}{3}\ y \cdot 4 = \frac{40}{3}\ y$ того количества травы, которое было на нем первоначально. Так как y есть прирост травы на 1 акре, то общее количество травы—первоначальной и прироста — таково, каково оно было бы на

$$3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}\ y \text{ акров.}$$

Значит, 12 быков за 4 недели съели траву с площади $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}\ y$ акров, один бык в одну неделю поел $\frac{1}{48}$ часть, то есть траву с

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}\ y\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{144} \text{ акров.}$$

Для такого же расчета относительно второго луга имеем:

за неделю прирост травы на 1 акр равняется y,

за 9 недель прирост травы на 1 акр равен $9y$,

за 9 недель прирост травы на 10 акров равен $90y$.

Запас травы на втором лугу и ее прирост за 9 недель равен количеству травы на площади

$$10 + 90y \text{ акров.}$$

Эту траву съедает 21 бык в течение 9 недель; один бык в одну неделю съедает траву с

$$\frac{10 + 90y}{9 \cdot 21} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ акров.}$$

Так как потребление травы у всех быков считается одинаковым, то последнее число должно равняться полученному при таких же расчетах на первом лугу:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189}.$$

Отсюда находим $y = \frac{1}{12}$.

Зная y, можем определить площадь луга, наличный запас травы которого может прокормить одного быка в течение недели, то есть найдем численную величину

$$\frac{10 + 40y}{144} \text{ при } y = \frac{1}{12}, \text{ то есть}$$

$$\frac{10 + 40 \cdot \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \text{ акра.}$$

Третий луг в 24 акра кормит x быков в течение 18 недель, для чего требуется $\frac{5 \cdot 18 \cdot x}{54} = \frac{5}{3} x$ акров луга. Прирост травы равен запасу с $24 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12} = 36$ акров, и вся съеденная за 18 недель трава равна запасу травы $24 + 36 = 60$ акров;

$$\frac{5}{3} x = 60,$$

$$x = 36.$$

3. ЗАДАЧА КЕРРОЛЛА

Курьеры из мест A и B двигаются, каждый равномерно, но с разными скоростями, друг другу навстречу. После встречи для прибытия к месту назначения одному нужно было еще 16, а другому — 9 часов.

Сколько времени требуется тому и другому для прохождения всего пути между A и B?

Решение

Обозначим скорости курьеров через u и v, а время от начала движения до встречи курьеров через t.

Первому курьеру для прохождения всего пути нужно $t + 16$ часов, второму $t + 9$. Расстояние между точками A и B можно выразить тремя различными способами:

$$(t + 16)\ u,\ (t + 9)\ v \text{ и } t\ (u + v).$$

Имеем равенства:

$$(t + 16)\ u = t\ (u + v) \text{ или } 16\ u = tv \text{ или } t = \frac{16u}{v},$$

$$(t + 9)\ v = t\ (u + v) \text{ или } 9\ v = tu \text{ или } t = \frac{9v}{u}.$$

Отсюда

$$16\frac{u}{v} = 9\frac{v}{u}, \quad \frac{u^2}{v^2} = \frac{9}{16}, \quad \frac{u}{v} = \frac{3}{4}.$$

Подставив найденное значение в первое выражение для t, имеем

$$t = \frac{16 \cdot 3}{4} = 12.$$

Первому курьеру для прохождения всего расстояния необходимо $12 + 16 = 28$ часов, второму $12 + 9 = 21$ час.

Проверьте ответ по условию задачи.

РАССКАЗ ДЕСЯТЫЙ

о задачах, которые удобнее решить с конца условия

1. ДОГАДЛИВЫЙ МАЛЫШ

Трем братьям дали всего 24 яблока, из которых каждому полагалось столько, сколько ему лет. Обиженный младший брат предложил другое деление, именно: он, младший брат, оставляет себе половину полученных яблок, а другую половину разделит поровну между старшими. После этого средний брат поступит так же с имеющимися у него яблоками и, наконец, старший брат делает то же. Братья согласились на такой дележ, после которого все братья получили яблок поровну.

Найти возрасты братьев.

Первый способ решения

Обозначим количество яблок у братьев:

I (младшего) x, II (среднего) y, III (старшего) z.

После первого дележа число яблок у братьев стало:

$$у\ \text{I}\ldots \frac{x}{2},\ у\ \text{II}\ldots y+\frac{x}{4},\ у\ \text{III}\ldots z+\frac{x}{4}.$$

После второго дележа у II брата остается $\frac{y}{2}+\frac{x}{8}$, и по половине этого количества, то есть по $\frac{y}{4}+\frac{x}{16}$, получают от него I и III братья. Количества яблок у братьев после второго дележа будут:

$$у\ \text{I}\ldots \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{x}{16},\ у\ \text{II}\ldots \frac{y}{2}+\frac{x}{8},\ у\ \text{III}\ldots$$

$$z+\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{x}{16}.$$

После третьего дележа у III брата остается половина имевшихся после второго дележа яблок, количество которых $\frac{z}{2}+\frac{x}{8}+\frac{y}{8}+\frac{x}{32}=8$; младшим братьям при третьем дележе досталось по 4 яблока. Отсюда уравнения:

у младшего брата: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{x}{16}+4=8$,

у среднего брата: $\frac{y}{2}+\frac{x}{8}+4=8$,

у старшего: $\frac{z}{2}+\frac{x}{8}+\frac{y}{8}+\frac{x}{32}=8$.

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{x}{16}=\frac{y}{2}+\frac{x}{8} \text{ или } 7x=4y;$$

в третьем уравнении вместо z можно подставить $24-x-y$ и по выполнении действий получить

$$128-11x-12y=0.$$

Решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 7x-4y&=0\\ 11x+12y&=128 \end{aligned}\right\},$$

получаем $x=4$, $y=7$ и $z=24-x-y=13$.

Проверка по условию показывает правильность решения:

яблок было первоначально	4, 7, 13;
после первого дележа	2, 8, 14;
после второго дележа	4, 4, 16;
после третьего дележа	8, 8, 8.

В т о р о е р е ш е н и е (начиная рассуждение с конца).

Окончательно было яблок у братьев I, II и III	8 8 8;
до третьего дележа (I и II при третьем дележе получили по 4 яблока)	4 4 16;
до второго дележа (I и III при втором дележе получили по 2 яблока)	2 8 14;
до первого дележа (II и III при первом дележе получили по одному яблоку)	4 7 13.

2. КРУГЛЫЙ ГОРШОК

В круглом горшке посажен кустик растений, который разрастается в виде круга. За неделю площадь, занятая растениями, удваивается, а за 10 недель растения охватывают всю поверхность земли в горшке.

За сколько недель растениями будет покрыта половина поверхности земли в горшке?

Решение

Так как к концу десятой недели вся поверхность будет охвачена растениями и за эту неделю занятая в начале десятой недели площадь удваивается, то половина площади была занята в конце девятой недели.

РАССКАЗ ОДИННАДЦАТЫЙ

о задачах на возрасты

1

Возрасты трех братьев 30, 20 и 6 лет. Через сколько лет возраст старшего будет равен сумме возрастов обоих младших братьев?

Решение

В данный момент возраст старшего брата на $30 - (20 + 6) = 4$ года больше, чем сумма возрастов младших братьев. Разность возраста старшего и каждого из младших братьев останется все время неизменной. Так например, разность возрастов старшего и среднего братьев не меняется. Первоначальная разность возрастов старшего брата и обоих младших уменьшится за счет того, что увеличение возраста самого молодого из братьев уменьшает первоначальную разность возрастов старшего и обоих младших братьев. Недостающие 4 года, необходимые для того, чтобы возраст старшего брата стал равным сумме возрастов двух других братьев, должны получиться от увеличения возраста младшего брата: на 4 года этот возраст увеличится через 4 года, когда возрасты трех братьев будут

34, 24 и 10.

Алгебраическое решение задачи: предположим, что условие задачи будет выполнено через x лет. Тогда

$$30 + x = 20 + x + 6 + x,$$
$$30 - 20 - 6 = 2x - x,$$
$$x = 4.$$

2

Отец сказал сыну: „10 лет назад я был в 10 раз, а через 22 года я буду только в 2 раза старше тебя“. Сколько лет сыну и отцу теперь?

Решение

1) Арифметическое

Пусть 10 лет назад возрасты сына и отца были 1 единица и 10 единиц; через 22 года, считая от теперешнего момента, возраст сына будет 1 единица + 32 года, возраст отца 10 единиц + 32 года.

По условию задачи возраст отца тогда будет в два раза больше возраста сына:

10 единиц + 32 года = 2 единицам + 64 года,

8 единиц = 32 годам, 1 единица = 4 годам.

Через 22 года сыну будет $1 \cdot 4 + 32 = 36$ лет, отцу $10 \cdot 4 + 32 = 72$ года.

Теперь: сыну $36 - 22 = 14$ лет, отцу $72 - 22 = 50$ лет.

Десять лет назад было: сыну 4 года, отцу 40 лет.

2) Решение с введением обозначения x.

Пусть возраст сына 10 лет назад был x; возраст отца тогда был $10x$.

По прошествии $10 + 22$ лет возрасты сына и отца будут $x + 32$ и $10x + 32$.

$$2(x + 32) = 10x + 32,$$
$$8x = 32, \quad x = 4.$$

10 лет назад было сыну 4 года, отцу 40 лет, теперь: сыну 14 лет, отцу 50 лет.

3

Отец Вани говорил: „Когда мне будет столько лет, сколько моему отцу теперь, то мой возраст будет в пять раз больше, чем возраст Вани теперь, а Ване тогда будет на восемь лет больше, чем мне сейчас. Отцу и мне сейчас вместе 100 лет“.

Сколько лет Ване теперь?

Решение

Назовем для ясности упоминаемые лица: Ваня, отец и дед.

По первому условию дед теперь в 5 раз старше

Вани; значит, теперешний возраст деда равен пятикратному возрасту Вани. А так как отцу и деду сейчас вместе 100 лет, то возраст отца сейчас: 100 — пятикратный возраст Вани.

Возраст отца будет равен возрасту деда, то есть пятикратному возрасту Вани через число лет, равное разности возрастов деда и отца теперь, то есть разности: пятикратный возраст Вани — (100 — пятикратный возраст Вани) то есть через десятикратный возраст Вани — 100.

К этому моменту возраст Вани будет равен его первоначальному возрасту + десятикратный этот же возраст — 100. Этот возраст на 8 лет больше теперешнего возраста отца, то есть разность:

11 возрастов Вани — 100 — (100 — 5 возрастов Вани) равно 8 годам, или

16 возрастов Вани — 200 лет равно 8 годам,

или 16 возрастов Вани равно 208 годам;

возраст Вани равен $208 : 16 = 13$ годам.

Отсюда следует, что деду было $13 \cdot 5 = 65$ лет, отцу $100 - 65 = 35$ лет.

Через $65 - 35 = 30$ лет Ване будет $13 + 30 = 43$ года, отцу $35 + 30 = 65$ лет, как и требуется по условиям задачи.

Алгебраическое решение

Пусть сыну x лет, отцу — y; тогда деду $100 - y$ лет. Возраст деда в 5 раз больше возраста сына:

$$100 - y = 5x. \dots \quad (1)$$

Разность возрастов деда и отца $100 - y - y = 100 - 2y$; по прошествии этого промежутка времени сыну будет

$$x + 100 - 2y \text{ лет,}$$

а это по условию на 8 лет больше начального возраста отца (y):

$$x + 100 - 2y = y + 8$$

или

$$x = 3y - 92 \quad \dots\dots \quad (2).$$

Из (1) имеем

$$15x = -3y + 300 \quad \dots \quad (1^1)$$

Из (1^1) и (2)

$$16x = 208,$$
$$x = 13.$$

И в этой задаче арифметическое решение значительно длиннее, чем алгебраическое, причем арифметическое решение было по существу почти алгебраическим.

На следующем примере увидим, что не всегда алгебраическое решение задачи короче арифметического решения.

4*

Марии и Анне сейчас вместе 44 года.

Мария в 2 раза старше, чем была Анна тогда, когда Марии было в 2 раза меньше лет, чем будет Анне в то время, когда ее возраст будет в 3 раза больше возраста Марии в тот момент, когда та (Мария) в 3 раза старше Анны.

Сколько лет Марии?

Анализ условия. В некоторый момент t_1 Мария была в 3 раза старше Анны. В другой момент t_2 возраст Анны будет в 3 раза больше, чем возраст Марии в момент t_1.

В третий момент t_3 Марии в 2 раза меньше лет, чем Анне в момент t_2.

В настоящее время t Мария в 2 раза старше, чем Анна в момент t_3.

Арифметическое решение

Пусть в момент t_1 возраст Анны 1 единица, возраст Марии 3 единицы. Разница возрастов 2 единицы и остается такой всегда.

В момент t_2 возраст Анны (он равен трехкратному возрасту Марии в момент t_1) $3 \cdot 3 = 9$ единиц.

В момент t_3 возраст Марии (половина возраста Марии в момент t_2) $9 : 2 = 4{,}5$ единицы; возраст Анны в тот момент (на 2 единицы меньше) $4{,}5 - 2 = 2{,}5$ единицы.

В настоящий момент t возраст Марии $2{,}5 \cdot 2 = 5$ единиц, возраст Анны $5 - 2 = 3$ единицы.

8 единиц $= 44$ годам, 1 единица $44 : 8 = 5{,}5$ года. Марии $5{,}5 \cdot 5 = 27{,}5$ лет, Анне $5{,}5 \cdot 3 = 16{,}5$ лет.

---

* Задача указана доцентом А. А. Лавровым (Калинин) по журналу „Наука и жизнь“.

Решение при помощи уравнений

Вводим обозначения: M и A — возрасты Марии и Анны в настоящий момент; пусть x — число лет, прошедших от того момента (t_1), когда Мария была в 3 раза старше Анны, через y — число лет от настоящего момента до того момента (t_2), когда возраст Анны будет в 3 раза больше, чем возраст Марии в момент t_1, через z — число лет, прошедших с момента, когда возраст Марии был равен половине возраста Анны в момент t_2.

Составляем систему уравнений.

В настоящий момент t: Марии M лет, Анне—A лет:

$$1)\ M + A = 44.$$

x лет назад (в момент t_1) Марии было $M - x$, Анне $A - x$ лет;

$$2)\ M - x = 3\ (A - x).$$

Через y лет (в момент t_2) Анне будет $A + y$ лет; по условию задачи:

$$3)\ A + y = 3\ (M - x).$$

z лет назад (в момент t_3) Марии было $M - z$ лет, Анне $A - z$ лет; по условию

$$4)\ M - z = 0{,}5\ (A + y).$$

В настоящее время Марии в два раза больше лет, чем было Анне в момент t_3 (то есть z лет назад):

$$5)\ M = 2\ (A - z).$$

Итак, имеем систему 5 уравнений с 5 неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ M + A = 44 \\ 2)\ M - x = 3\ (A - x) \\ 3)\ A + y = 3\ (M - x) \\ 4)\ M - z = 0{,}5\ (A + y) \\ 5)\ M = 2\ (A - z). \end{array}\right\}$$

Решить эту систему уравнений можно в разном порядке, приводя ее путем исключения неизвестных к системе двух уравнений с двумя неизвестными, например к снстеме, содержащей окончательные искомые величины M и A.

Из (1 и 5)

$$z = A - \frac{M}{2} = \frac{3}{2}A - 22;$$

из (2 и 3)

$$A + y = 9\ (A - x);$$

Из (4 и (2,3)) $M - z = M - \frac{3}{2} A + 22 = 0{,}5 (A + y) = 0{,}5 \cdot 9 (A - x) = 4{,}5A - 4{,}5x$,
то есть

$$M - \frac{3}{2} A + 22 = 4{,}5A - 4{,}5x.$$

Из (2)

$$M - x = 3A - 3x, \quad x = \frac{3A - M}{2};$$

подставляя полученное выражение для x в предыдущие равенства, имеем,

$$M - \frac{3}{2} A + 22 = 4{,}5A - 4{,}5 \left(\frac{3A - M}{2}\right);$$

умножаем на 4:

$$4M - 6A + 88 = 18A - 27A + 9M,$$
$$5M - 3A = 88.$$

Решаем систему

$$\left.\begin{array}{r} 5M - 3A = 88 \\ M + A = 44 \end{array}\right\} M = 27{,}5.$$

Не сложнее свести систему 5 уравнений к системе с неизвестными A и x.

Как в предыдущем решении, получаем

$$z = \frac{3}{2} A - 22 \text{ и } M - z = 4{,}5A - 4{,}5x.$$

На основании (1)

$$44 - A - \frac{3}{2} A + 22 = 4{,}5A - 4{,}5x$$

или

$$66 = 7A - 4{,}5x.$$

Из (2)

$$44 - A - x = 3A - 3x$$

или

$$4A - 2x = 44.$$

Имеем систему

$$\begin{array}{l|c|l} 7A - 4{,}5x = 66 & 4 & 8A = 132 \\ 4A - 2x \quad = 44 & 9 & A = 16{,}5, \ M = 27{,}5. \end{array}$$

Задача об Анне и Марии показывает, что не всегда алгебраическое решение задачи проще арифметического.

РАССКАЗ ДВЕНАДЦАТЫЙ

об уравнениях, вызвавших недоумение

ЗАДАЧА 1

Ученик решал уравнение

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x+3}=1.$$

Приводя левую половину уравнения к общему знаменателю и убедившись в безошибочности преобразований, ученик получил результат:

$$\frac{x^3+6x^2+11x+8}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}=1,$$

или, по раскрытии скобок в знаменателе:

$$\frac{x^3+6x^2+11x+8}{x^3+6x^2+11x+6}=1,$$

или, что вызвало удивление решавшего,

$$x^3+6x^2+11x+8=x^3+6x^2+11x+6,$$

так как по приведении подобных членов получается:

$$8=6.$$

Все преобразования в ходе решения уравнения были правильными, откуда же абсурдный результат?

Раньше чем читать дальше, попробуйте ответить на возникший вопрос.

Объяснение. Все преобразования правильны. Недоуменный вопрос возникает у того, кто неправильно толкует смысл уравнения.

Когда в уравнении ставится знак = между двумя его частями, то этот знак не означает равенство в арифметическом смысле соединяемых им выражений (то есть равенство числовых значений).

В уравнении соединение двух выражений знаком =

означает запись вопроса: существует ли такое числовое значение для x, называемое корнем уравнения, при котором соединяемые знаком $=$ выражения получают одинаковые числовые значения; если такое значение для x существует, то нахождение его и составляет решение уравнения. Когда мы пишем

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x+3}=1,$$

мы не знаем, существует ли корень у этого уравнения. Предполагая существование его, мы писали наше равенство, которое оказывается равносильным абсурдному утверждению

$$8=6.$$

Этот результат преобразований предполагаемого равенства показывает только то, что написанное уравнение не имеет корней.

Примечание. Для прочного усвоения двоякого смысла знака $=$ полезно при решении уравнений вместо знака $=$ употреблять какой-нибудь другой, например $\stackrel{?}{=}$.

Если бы мы в рассматриваемом уравнении употребляли знак $\stackrel{?}{=}$, то из уравнения

$$\frac{x^3+6x^2+11x+8}{x^3+6x^2+11x+6}\stackrel{?}{=}1$$

имели бы

$$\frac{x^3+6x^2+11x+6+2}{x^3+6x^2+11x+6}=\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3+6x^2+11x+6}+$$

$$\frac{2}{x^2+6x^2+11x+6}=1+\frac{2}{x^3+6x^2+11x+6}\stackrel{?}{=}1,$$ откуда ясно, что

$$\frac{x^3+6x^2+11x+8}{x^3+6x^2+11x+6}\neq 1.$$

ЗАДАЧА 2

Решить уравнение:

$$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}\ .$$

Решение

$$\frac{x+5-5x+35}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x},$$

$$\frac{40-4x}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x},$$

$$\frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x}.$$

Ученик заметил: если у равных дробей числители равны, то равны и знаменатели:

$$7-x=13-x,$$
$$7=13.$$

На основании решения первой задачи ученик сделал заключение: если правильные преобразования при решении уравнения приводят к невозможному результату, то это означает, что уравнение не имеет корней, и, значит, данное уравнение не имеет их.

Верно ли это?

Очевидно, нет.

Решаем уравнение так, как рекомендуется в учебниках. Перепишем уравнение так:

$$\frac{x+5}{x-7}-\frac{4x-40}{13-x}=5.$$

Сделав преобразования и освободившись от знаменателя, приходим к равенству

$$24x=240,$$
$$x=10.$$

Проверка подстановкой показывает, что корень уравнения найден верно.

Отчего же получилось невозможное равенство

$$7=13?$$

От неправильного заключения в конце решения о равенстве знаменателей дробей. Правильное заключение будет такое: если у равных дробей числители равны и отличны от нуля, то равны и знаменатели, причем предполагается выполненным всегдашнее условие для дробей, что знаменатели не равны нулю.

Задача 2 лишний раз показывает, что „с нулем надо обращаться осторожно".

ЗАДАЧА 3

С решением системы уравнений в одной школе произошел большой конфуз.

В качестве контрольной работы по алгебре в VII классе учительница дала каждому ученику особый вариант системы однотипных уравнений:

1) $2x + 3y = 4$
$5x + 6y = 7$

2) $3x + 5y = 7$
$9x + 11y = 13$

3) $5x + 7y = 9$
$11x + 13y = 15$

4) $2x + 5y = 8$
$11x + 14y = 17$

5) $3x + 7y = 11$
$15x + 19y = 23,$

и так далее.

Учительница предупредила: „Все вы любите заглядывать в тетрадь соседа. Поэтому я дала каждому особое задание, так что заглядывать в тетрадь соседа незачем“. Ученики, решив каждый свою систему уравнений, все же поинтересовались работой соседа, и сразу поднялось несколько рук.

— Мария Ивановна, что же это такое?

— А что? Проверочная работа по решению систем уравнений.

— Ответы получаются одинаковые.

Действительно, хотя системы уравнений все были различные, но, к удивлению учащихся, у всех получился один и тот же ответ: $x = -1$, $y = 2$.

Всматриваясь по предложению учительницы внимательнее в заданные системы уравнений, из которых несколько было выписано на доске, учащиеся обнаружили, что во всех системах коэффициенты составлены по общему правилу: каждый следующий коэффициент, включая и правые части уравнений, получен из предыдущего коэффициента прибавлением какого-нибудь одного и того же числа. В первой системе коэффициенты 2, 3, 4, 5, 6, 7, во второй: 3, 5, 7, 9, 11, 13, в пятой: 3, 7, 11, 15, 19, 23, и т. д.

Решенные примеры показали, что в них действительно указанное правило составления коэффицентов дает системы уравнений, которые имеют одни и те же корни: $x = -1$ и $y = 2$.

Однако тот факт, что в рассмотренных нескольких системах уравнений решением является $x = -1$ и $y = 2$, вовсе не доказывает, что такими же будет решение любой системы, в которой коэффициенты уравнений удовлетворяют указанному требованию. Всякое правило, полученное из числовых примеров, может оказаться не общим и не имеющим места для других числовых примеров. Общее правило, применимое ко всем возможным частным случаям вопроса, может быть получено на основании рассмотрения системы с буквенными коэффициентами.

Рассмотрим систему:

$$ax + (a + n)\ y = a + 2n$$
$$(a + 3n)\ x + (a + 4n)\ y = a + 5n.$$

В этой системе уравнений коэффициенты составлены по указанному выше правилу: первый коэффициент — произвольное число a, дальнейшие образуются повторным прибавлением произвольного числа n к предшествующему коэффициенту:

$$a,\ a + n,\ a + 2n,\ a + 3n \text{ и так далее.}$$

Вычитая почленно первое уравнение из второго, получаем:

$$3nx + 3ny = 3n,$$

или, так как $n \neq 0$,

$$x + y = 1 \text{ и } x = 1 - y.$$

Подставляя это значение x в первое данное уравнение, получаем $y = 2$, и, значит, $x = 1 - 2 = -1$.

Так как a и n произвольные числа, то все системы двух уравнений с двумя неизвестными, у которых коэффициенты составлены по указанному выше правилу, имеют одно и то же решение:

$$x = -1,\ y = 2.$$

Изучение систем уравнений рассмотренных типов показывает пользу решения уравнений и систем их с буквенными коэффициентами. Все общие свойства уравнений могут быть получены только на основании изучения уравнений с буквенными коэффициентами. Их ввел в широкое употребление в математике французский математик Франсуа Виет (1540—1603); буквенные обозначения для неизвестных употреблялись и до Виета. Виета часто называют отцом символической (буквенной) алгебры. В VIII классе вы узнаете теорему Виета о квадратных уравнениях. Она указывает свойства корней любого квадратного уравнения и выводится из уравнения с буквенными коэффициентами.

РАССКАЗ ТРИНАДЦАТЫЙ

о задачах, которыми увлекался Л. Н. Толстой

Великий писатель Лев Николаевич Толстой был любителем арифметики, и особенно задач, которые на первый взгляд кажутся сложными, однако могут быть, как видно из дальнейшего, решены при помощи самых простых соображений.

Толстой до конца жизни интересовался преподаванием арифметики в школе и написал учебник арифметики.

Известно, что в школу, в которой Толстой учил крестьянских детей, были приглашены учащиеся Тульской гимназии для проведения соревнования с учениками школы Толстого по арифметике. Ученики Толстого остались победителями.

Л. Н. Толстой мерил каждого человека дробью; числителем этой дроби является оценка человека другими людьми, что, в общем, более или менее соответствует действительности, знаменателем — собственное мнение человека о себе, что не всегда соответствует действительности и часто является преувеличенным. Про своего друга, А. В. Цингера, профессора физики, от которого мы знаем о последующих задачах, Толстой говорил:

А. В. Цингер

„У Цингера при большом числителе очень маленький знаменатель. Это делает его большой величиной“.

Вот несколько задач, обращавшихся в кругу знакомых Л. Н. Толстого.

ЗАДАЧА 1

Покупатель выбрал в магазине шляпу стоимостью в 10 рублей и дал продавцу двадцатипятирублевку (до революции были такие бумажные деньги).

У торговца не оказалось сдачи, и он послал полученную двадцатипятирублевку для размена. Покупатель после этого получил шляпу и 15 рублей сдачи. Когда покупатель ушел, пришел сосед купца и заявил, что двадцатипятирублевка фальшивая. Первый купец вернул соседу 25 рублей.

Спрашивается, сколько хозяин магазина в этом деле понес убытку?

Задача была предложена присутствовавшим на вечере у Толстого многочисленным гостям. Гости дали самые различные ответы.

Какой же из них правильный?

ЗАДАЧА 2

Две торговки продавали сливы. У каждой было по 30 слив. Одна отдавала за копейку 2 сливы, другая — 3. Для избежания вопросов покупателей, почему у одной сливы дороже, чем у другой, торговки решили соединить все сливы вместе и продавать 5 штук за 2 копейки. Одна торговка по первоначальному расчету должна была после продажи всех слив выручить 15 копеек, другая — 10 копеек, однако выручено было только 24 копейки, так как все 60 слив составили 12 пятков.

Куда делась одна копейка?

Эту задачу составил сам Толстой.

Американский вариант задачи Толстого

Американец Джим продал свой дом за 4000 долларов. Через некоторое время он купил его обратно за 3500 долларов и имел теперь прежний свой дом и 500 долларов. В подходящий момент он продал вновь дом за 4500 долларов, то есть на 1000 долларов дороже, чем платил сам.

Какую сумму заработал Джим на обеих сделках?

Решение задач Л. Н. Толстого

Задача 1

Если бы двадцатипятирублевка была настоящая, хозяин магазина не потерпел бы убытка. Получив фальшивую двадцатипятирублевку и выдав взамен ее шляпу и 15 рублей сдачи, купец потерял 25 рублей.

Задача 2

При составлении пятков слив в первые 10 пятков можно было взять по две от первой торговки и по три от второй, и эти пятки по установленной владельцами цене стоили по 2 копейки. Этим были проданы все сливы второй торговки (более дешевые). Для двух последних пятков осталось 10 слив первой торговки, которые стоили 5 копеек, но были проданы по 2 копейки за пяток — за 4 копейки, отсюда убыток в одну копейку.

Задача о Джиме

Сравните, что имел Джим до и после обеих своих сделок, и вы убедитесь, что он заработал не 1500 долларов, как кажется на первый взгляд, а только 1000 долларов.

Самой интересной задачей Толстой считал задачу о косарях, которая решается легко при помощи чертежа и поэтому помещена в соответственной главе нашей книги.

РАССКАЗ ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ

о задачах из художественной литературы

1. НАДПИСЬ НА МОГИЛЬНОМ КАМНЕ ДИОФАНТА

От греческого поэта и математика IV века нашего летосчисления Метродора до нас дошел ряд стихотворений, в числе которых 31 математическое. Одно из них, по преданию, является надписью на могильном камне гениального математика конца III века нашего летосчисления Диофанта, о жизни которого нам, кроме этого, ничего не известно.

Надпись эта в переводе, подражающем древним стихам, такова:

„Путник, здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать
Могут, о чудо, тебе, сколь долог был век его жизни.
Частью шестою всей жизни явилось прекрасное детство,
Двенадесятая часть протекла еще жизни, покрылся
Пухом его подбородок; седьмую прожив еще долю,
Браком себя сочетал Диофант. Жизни брачной год пятый
Был осчастливлен рожденьем премилого первенца сына,
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой
Дал на земле по сравненью с отцом, и в печали глубокой
Старец земного удела конец восприял, переживши
Года четыре, с тех пор как он сына лишился. Скажи мне,
Сколько лет жизнь Диофанта длилась в этом мире прекрасном?"

Нетрудно перевести стихи в уравнение и решить его.

Кто-то изложил решение латинскими стихами размера надписи. Вот попытка передать эти стихи в русском переводе:

„Иксом число неизвестных годов обозначив,
Ты уравненье составь, хорошенько подумав:

Член его первый — шестой будет долею икса,
Дальше — двенадцатой частью, а также седьмою
Ты увеличь результат, не забыв половину.
Пять и четыре добавив, ты икс и получишь.
Действия все совершив, ты увидишь, коль скоро
Не пропустил ничего, что тот возраст героя
Восемь десятков с четвёркой составит годов".

2. АЛГЕБРА В РАССКАЗЕ АНАТОЛЯ ФРАНСА

У крупнейшего французского писателя нашего века, Анатоля Франса (1844—1924), есть рассказ „Святая Евфросиния", в который включено решение системы уравнений.

„Евфросиния была дочерью богатого александрийского* гражданина. Она получила образование в музыке, танцах и арифметике, отличаясь острым и быстрым умом.

Когда ей не было еще одиннадцати лет, александрийские старейшины объявили, что выдадут золотую чашу тому, кто сумеет дать точный ответ на три вопроса.

Третий вопрос был следующий.

У Антипатра было столько же, сколько у Никомеда и третья часть денег Фемистиуса. У Никомеда — то, что у Фемистиуса и третья часть денег Антипатра. У Фемистиуса — десять мин (денежных единиц) и третья часть денег Никомеда. Какой суммой владеет каждый?

Когда в назначенный для конкурса день, выслушав неудачные ответы многих молодых людей, председатель уже собирался закрыть заседание, Евфросиния попросила выслушать и ее.

Ее ответ на третий вопрос: у Антипатра — 45 мин, у Никомеда — $37^1/_2$, а у Фемистиуса — $22^1/_2$.

В дальнейшем Франс рассказывает о том, как буду-

---

* Александрия — город в Египте, который со времени основания (III век до начала нашего летосчисления—до нашей эры) в течение восьмисот лет был центром математического творчества тогдашнего мира. Здесь работали: Евклид (III век до нашей эры), Эратосфен (II век до н. э.), Птолемей и Герон (II век нашей эры), Диофант (III в. н. э.), женщина-математик Ипатия (IV—V века н. э.) и другие.

щая „святая“, „познавшая всю суетность почестей“, обещала посвящать свой разум „на решение более достойных задач, например, вычислить числа, изображаемые буквами имени Иисус, и выяснить чудесные свойства этих чисел“.

Эти вычисления, которыми занимались религиозные мистики, вас не могут интересовать. На третий вопрос, предложенный Евфросинии, вы легко найдете ответ.

Обозначив суммы Антипатра, Никомеда и Фемистиуса соответственно через x, y и z, получим уравнения:

$$x = y + \frac{z}{3}, \quad y = z + \frac{x}{3}, \quad z = \frac{z}{3} + \frac{x}{9} + 10.$$

Складываем почленно первые два уравнения:

$$x + y = y + \frac{z}{3} + z + \frac{x}{3} \text{ или } \frac{2}{3} x = \frac{4}{3} z, \text{ или } x = 2z.$$

Подстановка этого результата в третье уравнение дает

$$z = 22{,}5; \quad x = 45; \quad y = 37{,}5.$$

П р и м е ч а н и е. Не сильны были в математике александрийские молодые люди, и немного требовалось от Евфросинии, чтобы прослыть мудрою. По-видимому, писатель своим рассказом и хочет отметить падение уровня математических знаний у богачей Александрии, в которой некогда творили великие математики Евклид, Аполлоний, Эратосфен и другие.

3. ЗНАКОМАЯ ВСЕМ ЗАДАЧА В СТИХАХ

К деревьям птицы подлетели
(Устать пришлося, видно, им);
Когда на каждом по две сели —
Одно осталося пустым.
Когда ж им сесть по-одиночке,
Не хватит дерева одной.
Скажи, обдумав эти строчки,
Деревьев счет и птиц какой.

Стихи И. И. Давидова

РАССКАЗ ПЯТНАДЦАТЫЙ

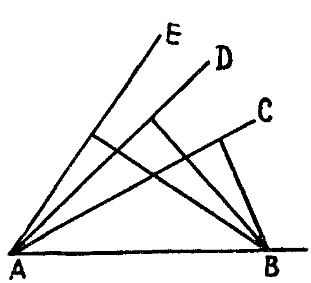
о задаче Адама Ризе и легкомысленном землемере

В жизни автора знаменитого учебника арифметики Адама Ризе произошел следующий случай.

Ризе встречал некоего землемера, который носил на своей фуражке серебряный циркуль в знак того, что он великолепно пользуется этим прибором. Хвастливое поведение этого человека не понравилось Ризе. Чтобы сбить с хвастуна спесь, Ризе вызвал его на соревнование; победителем должен был считаться тот, кто за назначенный промежуток времени построит большее число прямых углов, опирающихся на данный отрезок AB.

Землемер принял вызов, провел к отрезку AB из точки A лучи AC, $AД$, AE и другие и опускал на каждый из них перпендикуляры из точки B.

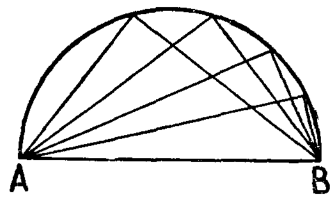
По истечении положенного срока оказалось, что Ризе, про которого говорили, что он носил циркуль н е н а г о л о в е, но имел учение о пользовании циркулем в г о л о в е, построил за это время в десятки раз больше прямых углов, чем землемер.



Спрашивается: как поступил Адам Ризе?

В решении задачи, служившей предметом соревнования, Ризе исходил из теоремы, которую знал уже первый греческий математик Фалес (конец VII и начало VI века до начала нашего летосчисления).

Ризе описал полуокружность на диаметре AB и соединением произвольных точек дуги с концами диаметра получил прямые углы гораздо скорее, чем „ученый землемер“ своим построением.



Устройте соревнование в своем классе: пусть один из товарищей строит прямые углы, опирающиеся на данный отрезок AB, способом землемера, другой — способом Адама Ризе. Во сколько раз больше прямых углов построит второй за 10 минут?

Известен рассказ о великом русском математике Михаиле Васильевиче Остроградском (1801—1862), который успевающих учащихся называл геометрами, неуспевающих — землемерами. Такое деление учащихся у Остроградского основывалось на том, что какой-то землемер на Украине площадь треугольника вычислял умножением основания на половину боковой стороны, хотя и слыхал, что „губернский землемер делает это как-то иначе“.

Задача Адама Ризе могла бы также дать основание для такого деления на землемеров и геометров.

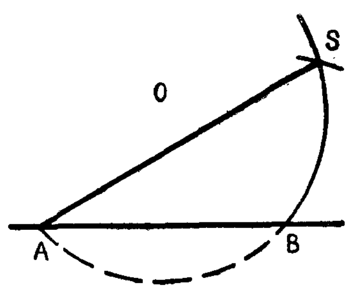
Еще и еще напоминаем: приступая к решению любой задачи, сначала подумайте, как ее решить возможно более простым способом.

Разные самые элементарные приемы могут при этом оказаться полезными. Вот пример в духе Адама Ризе.

Построение угла в 30°

Пусть к лучу AM требуется построить угол в 30° с вершиною в точке A.

Из произвольной точки O, как центра, радиусом OA проводим дугу окружности. Из точки B, пересечения дуги с лучом AM, тем же радиусом OA сделаем засечку S на проведенной дуге и соединим точку S с точкой A. Образовавшийся угол,



$\angle SAB = 30°$, как вписанный угол, опирающийся на дугу в 60°.

Пунктирных линий проводить не надо.

Из-за легкости построения угла в 60°, как центрального угла, опирающегося на радиус, этот угол часто употребляется в чертежной практике. Построение угла в 30° столь же просто и поэтому заслуживает внимания чертежников.

Примечание. Обычный способ построения угла в 30° требует построения прямоугольного треугольника, у которого один катет равен половине гипотенузы, или построения угла в 60° и деления его пополам.

Тот и другой способы требуют проведения нескольких дуг и нескольких отрезков (сосчитайте, скольких!)

Предлагаемый способ требует проведения только одной дуги BS и одного отрезка AS, после того как сделана засечка тем же радиусом OA.

РАССКАЗ ШЕСТНАДЦАТЫЙ

о задаче знаменитого государственного деятеля

1. ЗАДАЧА М. М. СПЕРАНСКОГО

Знаменитый русский государственный деятель Михаил Михайлович Сперанский (1772—1839), составитель „Свода законов“ Российской империи, сын сельского попа, возведенный в графское достоинство, начал свою карьеру в качестве преподавателя математики, физики и философии в Александро-Невской духовной семинарии (академии). До нас дошли его лекции по физике. В них он предлагает задачу.

На бильярдном столе имеются два шара A и B. В каком направлении надо стукнуть шар A, чтобы он после двух отражений от бортов бильярда ударил шар B?

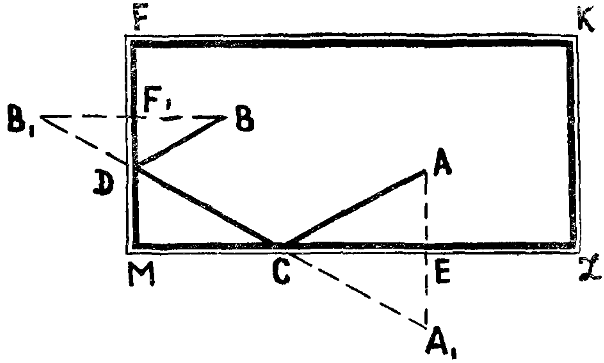
Решение

Из физики известно, что направление движения упругого тела (каким является бильярдный шар) после удара о борт образует с бортом угол, равный тому углу, который движение составляло с бортом до удара.

Предположим, что решение задачи получается при движении шара по ломаной $ACDB$. По указанному закону физики должно быть:

$$\angle ACE = \angle MCD; \ \angle MDC = \angle FDB.$$

Продолжим отрезок DC до пересечения в точке A_1 с продолжением перпендикуляра AE, опущенного из точки A на ML. Точка A_1 называется симметричной с точкой A относительно ML. Так же находим точку B_1, симметричную с точкой B относительно MF.



$$\triangle\ CEA = \triangle\ CEA_1;\ \triangle\ BDF_1 = \triangle\ B_1DF_1$$

(прямоугольные треугольники, имеющие по равным катету и острому углу).

Из равенств треугольников следует:

$$EA_1 = AE,\ B_1F_1 = BF_1.$$

Находя точки A_1 и B_1 мы соединяем их прямой и получаем точки C и D.

По закону физики шар A, получив толчок в направлении AC, после двух отражений от бортов придет в точку B.

Решение задачи свелось к нахождению точек A_1 и B_1, симметричных с точками A и B относительно бортов бильярда. Построение симметричных точек и фигур оказывается полезным при решении многих задач.

Задача возможна и имеет одно единственное решение, если прямая A_1B_1 пересекает бильярдный стол.

2. ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ М. М. СПЕРАНСКОГО

На бильярдном столе, имеющем форму прямоугольника, находятся два шара A и B. В каком направлении надо толкнуть шар A, чтобы он, отразившись последовательно от всех четырех бортов, ударил шар B?

Решение

Предположим, что ломаная $A\ B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B$ дает решение задачи. На основании закона отражения в каждой точке столкновения шара с бортом углы, образованные бортом и направлениями приближающегося к борту и удаляющегося от него шара, должны быть равны, например $\angle AB_1M_1 = \angle B_2B_1M$. Этот угол равен углу $A_1B_1M_1$, который образует продолжение B_2B_1 за борт бильярда; точка A_1 на продолжении B_2B_1 является симметричной точке A относительно MF; $A_1M_1 = M_1A$.

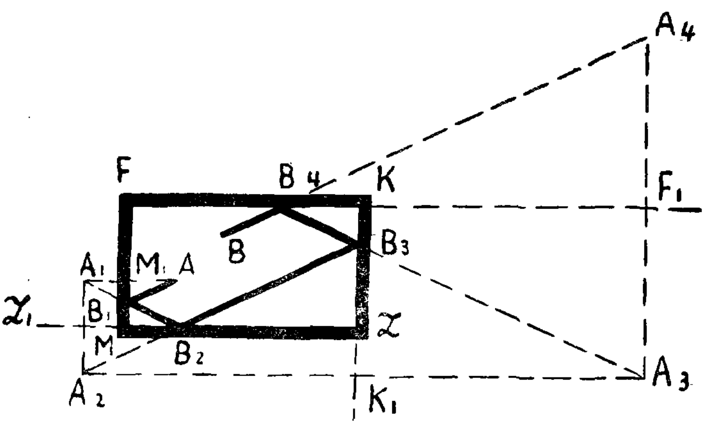
Точно так же $\angle B_1B_2M = \angle B_3B_2L = \angle MB_2A_2$ и точка A_2 симметрична точке A_1 относительно LL_1.

То же рассуждение и построение применяем к точкам B_3 и B_4:
$\angle B_2B_3L = \angle B_4B_3K = \angle LB_3A_3$; точка A_3 симметрична точке A_2 относительно KK_1, так как $A_2K_1 = K_1A_3$; $\angle B_3B_4K = \angle BB_4F = \angle KB_4A_4$; точка A_4 симметрична точке A_3 относительно FF_1.

Построение. Построим точки A_1, A_2, A_3 и A_4; A_1 симметрична данной точке A относительно FM, A_2 симметрична точке A_1 относительно L_1L (продолженного борта ML), A_3 симметрична точке A_2 относительно направления KL, и т. д. A_4 симметрична точке A_3 относительно направления FK.

Соединяем

точку B с A_4, получим точку B_4,
точку B_4 с A_3 . . . . B_3,
точку B_3 с A_2 . . . . B_2,
точку B_2 с A_1 . . . . B_1.



Толчок шару A в направлении AB_1 приведет его после четырех отражений в точку B.

Задачу можно обобщить, предполагая:

1) бильярд многоугольным, в котором происходит более четырех отражений;

2) что шар B совпадает с шаром A, иными словами, шар A после четырех отражений придет в начальное положение.

(Проделайте это.)

РАССКАЗ СЕМНАДЦАТЫЙ

о том, что пятиклассник может решить задачу не хуже десятиклассника

1. ЗАДАЧА О СЕМИ ШАПКАХ

Семь мальчиков обменялись своими шапками так, что у каждого была надета чужая шапка.

Сколькими способами можно так обменяться?

Примечание. Эту задачу можно решить при помощи теории соединений, которая изучается в X классе. Однако ее можно решить и при помощи простых арифметических рассуждений, и притом не одним только способом. Арифметическое решение ее и гораздо проще, то есть гораздо красивее.

Решив задачу для семи шапок, дайте решение задачи в общем виде для n шапок.

Решение арифметическое

Обозначим число способов, сколькими n мальчиков могут обменять свои шапки так, что у каждого будет надета чужая шапка, символом x_n.

В случае 4 мальчиков это число способов будет x_4, в случае 5 мальчиков — x_5 и так далее.

Легко непосредственно подсчитать x_1, x_2, x_3, x_4.

Очевидно, что $x_2=1$, так как два мальчика могут только одним способом обменять свои шапки.

Для вычисления x_3 и x_4 обозначим номера мальчиков латинскими цифрами I, II, III..., их шапки — соответственными индийскими цифрами 1, 2, 3...

Пусть имеются трое мальчиков — I, II, III. Шапки их обозначим соответственно 1, 2, 3. Возможны только следующие 2 распределения шапок при выполнении условия, что у каждого мальчика будет надета чужая шапка:

I II III — мальчики;

$$\left.\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right\}$$ распределения шапок при условии, чтобы у каждого была надета чужая.

Итак,

$$x_3=2.$$

Пусть имеем четыре мальчика — I, II, III, IV и их шапки — 1, 2, 3, 4.

I II III IV — мальчики;

$$\left.\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right\}$$ распределения шапок при условии, чтобы у каждого была надета чужая.

Возможны только эти случаи распределения шапок при условии, чтобы у каждого была надета чужая шапка.

Итак,

$$x_4=9.$$

Мы пока что знаем, что

$$\boxed{x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=9}$$

Подсчитать непосредственно x_5 будет уже сложнее.

Если бы мы знали формулу, которая связывает x_5 со значениями x_4, x_3, x_2, то могли бы найти x_5 без непосредственного подсчета возможных случаев. Словом, возникает вопрос о нахождении формулы, выражающей x_5 через значения x при индексе (значке при x), меньшем 5, и далее — общий вопрос о нахождении формулы, связывающей x_n со значениями x при индексе, меньшем n, то есть о формуле, связывающей x_n с числами x_{n-1}, x_{n-2} и так далее.

Способ решения задач, заключающийся в том, что задача о некотором числе n предметов сводится к той же задаче относительно меньшего числа предметов, применяется в математике часто.

Этот способ (или метод) называется возвратным, или рекуррентным. Нам и предстоит найти для нашей задачи рекуррентную формулу, то есть формулу, которая выражает число x_n через x_{n-1}, x_{n-2} и так далее.

Найдем сначала выражение x_5 через x_4, x_3. Наше рассуждение, примененное к x_5, остается тем же, если взять x с любым индексом n; в общем случае мы можем о числе x_n говорить то же, что было сказано о числе x_5.

Вывод рекуррентной формулы

Предположим, что четыре шапки — 1, 2, 3, 4 — распределены между четырьмя мальчиками — I, II, III, IV — **всеми возможными способами** распределения их. Эти способы нетрудно перечислить.

I II III IV — мальчики;

1 2 3 4 — у каждого надета своя шапка;

$$\left.\begin{matrix}1&3&4&2\\1&4&2&3\end{matrix}\right\}\text{ у первого своя шапка, у остальных — чужие;}$$

$$\left.\begin{matrix}3&2&4&1\\4&2&1&3\end{matrix}\right\}\text{ у второго своя шапка, у остальных — чужие;}$$

$$\left.\begin{matrix}2&4&3&1\\4&1&3&2\end{matrix}\right\}\text{ у третьего своя шапка, у остальных — чужие;}$$

$$\left.\begin{matrix}2&3&1&4\\3&1&2&4\end{matrix}\right\}\text{ у четвертого своя шапка, у остальных — чужие;}$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&4&3\\1&4&3&2\\1&3&2&4\\4&2&3&1\\3&2&1&4\\2&1&3&4\end{matrix}\right\}\text{ у двух мальчиков надеты свои шапки, у остальных — чужие;}$$

2 3 4 1
2 4 1 3
2 1 4 3
3 1 4 2
3 4 2 1
3 4 1 2
4 1 2 3
4 3 2 1
4 3 1 2

$\Bigg\}$ у всех мальчиков надеты чужие шапки (эти случаи были подсчитаны выше).

Итак, четыре шапки четырьмя мальчиками могут быть распределены между собою двадцатью четырьмя различными способами, среди которых имеется 9 случаев таких, что у каждого мальчика надета чужая шапка, 8 случаев таких, что только у одного мальчика надета своя, у других—чужие шапки; 6 случаев таких, что у двух мальчиков надеты свои шапки, и 1 случай, когда у всех мальчиков надеты свои шапки. Отметим, что не может быть случаев, в которых только у троих из мальчиков надеты свои шапки, так как в таком случае и у четвертого мальчика обязательно будет надета также своя шапка*.

[В каждом из 24 случаев четыре номера шапок (1, 2, 3, 4) стоят в отличном от других случаев порядке. Никакого иного распределения номеров четырех шапок — 1, 2, 3, 4, — отличного от приведенных в нашей таблице 24 случаев, найти не удается (проверьте это утверждение!). Иными словами, из четырех чисел (1, 2, 3, 4) сделаны все возможные перестановки, как говорят в математике. Вместо чисел можно было взять четыре каких-нибудь различных предмета, знака, одним словом, — четыре каких-нибудь элемента. Число всех возможных перестановок из n элементов обозначается символом P_n. В предыдущем рассуждении мы нашли,

* Отрывок, заключенный в квадратные скобки, для решения нашей задачи не является необходимым и помещается здесь лишь для интересующихся. Он может при чтении быть опущен.

что $P_4 = 24$. Проверка показывает, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Таким образом, имеем:

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

В математике условились произведения всех натуральных чисел от 1 до n, то есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$, обозначать сокращенно — символом $n!$, называемым **факториалом** n. Согласно этому условию, имеем:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n,$$
$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

В курсе старших классов доказывается, что число перестановок из n элементов при всяком n равно факториалу числа n, то есть что

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n.$$

Как указано выше, для решения нашей задачи, то есть для нахождения рекуррентной формулы, связывающей x_5 с x_4, x_3 и вообще x_n с x_{n-1}, $x_{n-2} \ldots$, ни понятие о числе перестановок, ни понятие факториала не нужны, а сама формула, как мы сейчас покажем, может быть найдена простыми рассуждениями].

Итак, стоит вопрос: если число способов, сколькими 4 мальчика (в общем случае — n мальчиков) могут распределить между собою шапки так, чтобы у каждого была надета чужая шапка, обозначить символом x_4 (в общем случае — x_n), то нельзя ли выразить число x_5 (в общем случае — x_{n+1}), через x_4, x_3 (в общем случае через x_n, $x_{n-1} \ldots$)?

Для всех возможных распределений между мальчиками четырех шапок мы имели таблицу 24 случаев на страницах 107 и 108.

Пусть к четырем мальчикам присоединяется пятый (V) со своею шапкою (5). Как составить для пяти мальчиков все возможные случаи распределения шапок при выполнении условия, чтобы у каждого была надета чужая шапка?

В таблице содержится $x_4 = 9$ перестановок четырех шапок, выполняющих условие, что у каждого мальчика надета чужая шапка. Пятый мальчик, присоединившись к прежним четырем, может обменять свою шапку с каждым из первых четырех мальчиков. При этом получаются такие группы по пяти мальчиков, что у каждого из пяти мальчиков будет надета чужая шапка. Из каждого из девяти таких распределений для четырех мальчиков получится четыре распределения пяти шапок между пятью мальчиками, притом таких, что у каждого мальчика будет надета чужая шапка.

Так, например, распределение шапок:

I II III IV — мальчики,
2 3 4 1 — шапки, —

дает следующие четыре распределения пяти шапок пяти мальчиков:

$$\begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} \text{— мальчики:}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right\} \text{распределения шапок.}$$

Во всех этих случаях у каждого из мальчиков надета чужая шапка. Таким же образом каждое из девяти распределений шапок четырех мальчиков дает по четыре распределения их для пяти мальчиков; условие, требующее, чтобы у каждого мальчика была надета чужая шапка, выполнено. Имеем, таким образом, уже

$$4 \cdot x_4 = 4 \cdot 9 = 36$$

способов распределения шапок для пяти мальчиков, согласно требованиям задачи.

То же рассуждение, примененное к n мальчикам с x_n возможными случаями распределения шапок, дает $n \cdot x_n$ распределений шапок для $(n+1)$ мальчика.

Но ни $4 \cdot x_4 = 36$, ни $n \cdot x_n$ не дают x_5 или x_{n+1} полностью.

В таблице всех возможных перестановок шапок четырех мальчиков (стр. 108) было $4 \cdot 2 = 4 \cdot x_3 = 8$ таких распределений шапок, в которых у одного мальчика была надета своя шапка, у всех остальных мальчиков — чужие шапки. Если пятый мальчик обменяется шапкою с тем из первых четырех, у которого надета своя шапка, то после обмена у всех пяти мальчиков будут надеты чужие шапки. Так из распределений шапок у четырех мальчиков, при котором у первого мальчика надета своя шапка,

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array} \text{— мальчики,}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right\} \text{шапки,}$$

получаются распределения пяти шапок у пяти мальчиков:

$$\begin{array}{l} \text{III III IV V — мальчики,} \\ \left.\begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right\} \text{шапки,} \end{array}$$

причем у каждого из пяти мальчиков надета чужая шапка. Таким образом, из восьми таких распределений четырех шапок, когда лишь у одного мальчика была надета своя шапка, получается при присоединении еще одного мальчика и соответственного обмена шапок

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot x_3 = 8$$

новых распределений пяти шапок при условии, что у каждого из пяти мальчиков надета чужая шапка.

Рассуждая аналогично о n мальчиках, к которым присоединили $(n+1)$-го (эн плюс первого) мальчика, мы имели бы для n мальчиков $n \cdot x_{n-1}$ распределений n шапок так, что лишь у одного из n мальчиков надета своя шапка. После обмена с $(n+1)$-ым мальчиком шапки получили $n \cdot x_{n-1}$ распределений шапок для $n+1$ мальчика, удовлетворяющих требованию о том, что у каждого из $n+1$ мальчика надета чужая шапка.

Из первоначальных распределений шапок для четырех мальчиков, когда у двух или у всех четырех была надета своя шапка, присоединением еще одного мальчика и обмена его шапки нельзя получить таких распределений шапок для пяти мальчиков, чтобы у каждого оказалась чужая шапка.

Таким образом, для пяти мальчиков имеем единственно возможные распределения шапок, удовлетворяющие требованиям задачи:

$$x_5 = 4 \cdot x_4 + 4 \cdot x_3 = 4\ (x_4 + x_3).$$

В общем случае для $n+1$ мальчика имеем:

$$x_{n+1} = nx_n + nx_{n-1} = n\ (x_n + x_{n-1}).$$

Это равенство и есть общая рекуррентная формула, определяющая число искомых распределений для любого числа n шапок через соответственные числа для $n-1$ и $n-2$ шапок. Для любого числа шапок мы получим ответ, зная ответ для двух предыдущих меньших чисел $n-1$ и $n-2$. А так как для $n=2$ и $n=3$ мы знаем x_2 и x_3, то можем найти x_n для любого n.

Имеем общую рекуррентную формулу

$$\boxed{x_{n+1} = n\ (x_n + x_{n-1})}\ .$$

Применение этой формулы дает:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 1, \\
x_3 &= 2, \\
x_4 &= 3\,(x_3 + x_2) = 3\,(\;\;2 + \;1) = 9, \\
x_5 &= 4\,(x_4 + x_3) = 4\,(\;\;9 + \;2) = 44, \\
x_6 &= 5\,(x_5 + x_4) = 5\,(\;44 + \;9) = 265, \\
x_7 &= 6\,(x_6 + x_5) = 6\,(265 + 44) = 1854
\end{aligned}
$$

и так далее.

Способ решения нашей задачи (рекуррентный) сводит вопрос для данного числа к тому же вопросу для предыдущих меньших чисел: для получения ответа для данного числа n мы должны вычислить соответственные ответы для всех предшествующих числу n натуральных чисел. Такой способ решения может показаться утомительным, но во многих задачах мы иного пути решения вопроса не имеем.

В X классе наша задача может быть решена при помощи специальных формул, которые там будут выведены, но вычисление ответа для любого числа n будет по этим формулам не менее утомительным.

Второй вывод рекуррентной формулы*

Рекуррентная формула, решающая нашу задачу, может быть получена другим рассуждением.

Все возможные x_5 случаев распределения шапок пятью мальчиками между собой так, чтобы у каждого была надета чужая шапка, состоят из двух групп распределений:

А — распределения, при которых первый мальчик обменялся шапкою с кем-нибудь из остальных мальчиков (случаи, при которых происходит взаимный обмен шапками у первого мальчика);

В — распределения, при которых нет такого взаимного обмена шапками у первого мальчика.

Вычислим число случаев А и В.

Выпишем все возможные случаи, в которых первый мальчик обменялся шапкой с кем-нибудь из других.

---

* Второй вывод рекуррентной формулы дается для тех читателей, которые не боятся некоторых трудностей. Он может при первом чтении книги быть пропущен.

I II III IV V — мальчики;

$$\left.\begin{array}{ccccc}2&1&4&5&3\\2&1&5&3&4\\3&4&1&5&2\\3&5&1&2&4\\4&5&2&1&3\\4&3&5&1&2\\5&3&4&2&1\\5&4&2&3&1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{случаи распределения шапок так, что}\\\text{первый мальчик произвел обмен шап-}\\\text{ками с одним из своих товарищей.}\end{array}$$

Всего имеем $4 \cdot 2$ или $4 \cdot x_3$ таких перестановок шапок. В случае $n+1$ мальчика имели бы соответственно

$$n \cdot x_{n-1}$$

распределений шапок типа А, удовлетворяющих условию задачи.

Рассмотрим далее те случаи, в которых взаимного обмена шапками у первого мальчика с другим не происходит (случаи типа В). Пусть, например, I мальчик надел шапку 2. Остаются мальчики II, III, IV, V и шапки 1, 3, 4, 5.

Сколькими способами эти четыре мальчика могут обменять свои шапки так, чтобы ни у кого из них не оказалась надетой своя шапка?

Если бы мы имели:

II III IV V — мальчики,
2 3 4 5 — шапки,

то вопрос заключался бы в решении нашей задачи для четырех мальчиков и число возможных случаев было бы x_4.

Сколько будет случаев, удовлетворяющих условию задачи, если у нас остались

мальчики II III IV V,
шапки 1 3 4 5?

Число случаев, удовлетворяющих условию задачи, будет также x_4, так как хотя у мальчика II, вместо своей шапки, осталась шапка 1, но эту шапку 1 он для получения распределений типа В надеть не может. Если он наденет шапку 1, то имеет место обмен шапками мальчиков I и II; соответственное распределение шапок вошло уже в группу распределений типа А. Таким образом, число распределений типа В, соответствующих случаю, в котором I мальчик надел шапку 2, будет x_4.

Так как мальчик I может надеть шапку каждого из остальных четырех мальчиков, то общее число распределений шапок типа В для пяти мальчиков будет

$$4x_4.$$

Ведя рассуждение относительно $n+1$ мальчика, мы получим число распределений типа В

$$n \cdot x_n.$$

Так как все возможности распределения шапок, удовлетворяющие условию задачи, относятся либо к типу А, либо к типу В (взаимный обмен шапок у первого мальчика с кем-нибудь из других имеет место или не имеет места), то имеем:

$$x_5 = 4x_4 + 4x_3 = 4\ (x_4 + x_3),$$
$$x_{n+1} = nx_n + nx_{n-1} = n\ (x_n + x_{n-1}).$$

Мы пришли к той же рекуррентной формуле, как и при первом способе рассуждения.

* * *

Автору книги не раз приходилось излагать решение этой задачи в школах, притом в классах от VII до X. В старших классах к изложенным выше способам решения добавлялось и решение с применением теории соединений. Обычно учащиеся задавали вопрос: какой способ вывода рекуррентной формулы лучше?

Лучшим из двух изложенных способов является тот, который вам понятен. Самым же лучшим будет тот вывод, который вы придумаете сами. Эта возможность отнюдь не исключена.

Профессор Василий Петрович Ермаков (1845—1922), весьма известный в высшей математике и много сделавший также для улучшения преподавания математики в школе, применял особый способ чтения математических книг. Он читал первую страницу новой книги, чтобы узнать, какую задачу себе ставит автор, затем последнюю страницу, чтобы узнать, к какому результату автор приходит, и, закрыв книгу, самостоятельно находил путь получения результата. Не раз способ решения, найденный таким образом Ермаковым, оказывался отличным от того, которым пользовался автор книги. Наука в этих случаях обогащалась новыми методами.

В.П. Ермаков

Желательно, чтобы школьник, читая рассказы о решении новых для него задач, поступал по способу профессора Ермакова, стараясь каждый раз самостоятельно найти решение задачи или, что еще лучше, дать свой оригинальный способ решения. С таких попыток самостоятельного решения задач началась творческая работа почти всех крупных математиков. В „Журнале элементарной математики", издававшемся профессором Ермаковым для учителей и учащихся школ, с самостоятельного решения простых вопросов начал свое творчество один из самых гениальных русских математиков — Георгий Феодосьевич Вороной (1868—1908). В том же журнале печатали свои первые юношеские попытки математического творчества известные впоследствии профессора-математики Д. А. Граве, И. И. Иванов, В. Ф. Каган, И. И. Чистяков и другие.

2. ИНДИЙСКАЯ ЗАДАЧА

Индийский математик четырнадцатого века Нараяна предложил такую задачу:

„Имеется корова, которая в начале каждого года приносит по телке. Каждая телка, начиная с четвертого года своей жизни, в начале каждого года приносит также по телке. О ученый человек, скажи мне общее число коров в двадцатом году".

Решение

Задачу эту можно решить также знакомым нам рекуррентным методом.

Не надо смущаться не совсем реальными условиями задачи (можно было бы заменить их более реальными), для усвоения приема решения задач подобного типа это значения не имеет. Сохраняя задачу такой, какою ее оставил нам индийский математик прошлого, мы оказываем некоторое уважение его памяти и народам Индии, которым принадлежат многие достижения в математике.

Нетрудно установить для решения этой задачи рекуррентную формулу, что, как мы знаем, и является основным звеном решения задач этим способом.

В первый год имелись корова и телка, родившаяся в начале года, — значит, 2 особи. В начале второго года прибавилась еще телка; стало 3.

В начале третьего года прибавилась еще телка, стало всего 4.

В начале четвертого года к имеющимся четырем прибавились две, так как и первоначально имевшаяся корова и телка первого года дали по телке, всего стало

$$4 + 2 = 6 \text{ особей.}$$

В начале пятого года к 6 коровам прибавилось по телке от имевшихся в начале второго года особей, которых было 3; теперь стало

$$6 + 3 = 9 \text{ особей.}$$

Начиная с четвертого года, поголовье стада определяется по одной и той же рекуррентной формуле. Если обозначить поголовье четвертого года символом x_4, а для любого (n-го) года символом x_n, то имеем:

$$x_4 = x_3 + x_1,$$
$$x_5 = x_4 + x_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = x_{n-1} + x_{n-3}.$$

Формула очевидна, так как по условию задачи для получения числа коров (и телок) на любой год надо к числу голов предыдущего года прибавить телят, родившихся в начале этого года, а их будет столько, сколько было голов три года тому назад.

Итак, получим таблицу:

Год	Число коров и телят	
I	2	определяется непосредственным подсчетом
II	3	
III	4	
IV	6	по формуле $x_n = x_{n-1} + x_{n-3}$.
V	9	
VI	13	
VII	19	
VIII	28	
IX	41	
X	60	
XI	88	
XII	129	
XIII	189	

XIV	277
XV	406
XVI	595
XVII	872
XVIII	1278
XIX	1873
XX	2745

Итак, в двадцатом году поголовье стада составляло бы 2745 особей, если размножение их шло согласно условиям задачи.

РАССКАЗ ВОСЕМНАДЦАТЫЙ

о решении геометрических задач, не рассматриваемых в учебнике

ЗАДАЧА 1

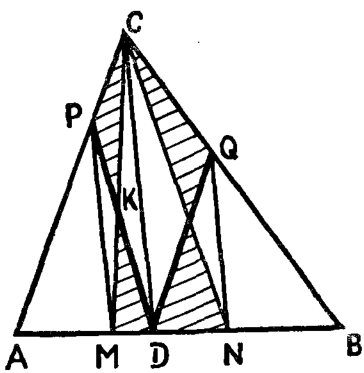
Разделить треугольник прямыми, проведенными из данной на одной из сторон точки, на равновеликие части.

Решение

Дан $\triangle$ ABC и точка D на основании его. Требуется разделить его прямыми, проведенными из точки D, на три равновеликие части. Пусть точки M и N делят основание на три равные части.

Треугольники AMC, MNC и NBC равновелики, так как у них основания и высоты равны.

Если провести отрезок DC, параллельные ему отрезки NQ и MP и отрезки DQ и DP, мы получим решение задачи: треугольники DBQ и ADP и четырехугольник $DQCP$ равновелики.



Доказательство

Треугольники DCM и DCP равновелики, так как у них общее основание и равные высоты (их вершины M и P лежат на отрезке PM, параллельном DC). Если от этих равновеликих треугольников отнять $\triangle$ DKC, то остаются равновеликие треугольники CKP и DKM.

Поэтому $\triangle\, APD$ равновелик с треугольником AMC, площадь которого равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC.

Так же доказывается, что площадь треугольника DPQ равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC, а следовательно, площадь четырехугольника $PDQC$ равна трети площади треугольника ABC.

Примечание: Подобные задачи на деление фигур содержатся в большом числе во всех учебниках геометрии XVII и XVIII веков, в том числе в первом учебнике геометрии на русском языке (1708 и последующих лет) „Геометрия словенски землемерие или приемы циркуля и линейки или избраннейшее начало во математических искусствах“ и в первом школьном учебнике геометрии „Краткое руководство к геометрии“, изданном для народных училищ Российской империи в 1782 году.

Рукопись первой книги, как видно из сохранившегося экземпляра, исправлял сам Петр I во время войны со Швецией. По этому можно видеть, какое значение придавал Петр математическому просвещению юношества.

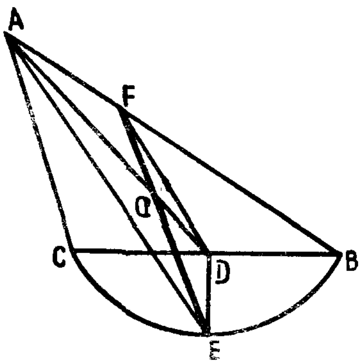
Задачи на деление фигур были очень распространены у древнегреческих математиков, начиная с Пифагора (VI век до начала нашего летосчисления). Полагают, что эти задачи возникли в связи с делением захваченных у помещиков земель после народных восстаний. У знаменитого математика Евклида (около 300-го года до нашего летосчисления) была книга „Деление фигур“ (история нахождения ее рассказана в статье автора настоящей книги в журнале „Математика в школе“, 1946, № 2). Решим одну из задач книги Евклида.

ЗАДАЧА 2

Разделить при помощи прямой пополам площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и двумя пересекающимися прямыми, исходящими из концов дуги (см. стр. 120).

Решение

Проведем из точки D, середины CB, отрезок DA, перпендикуляр DE к CB, отрезок EA и параллельно



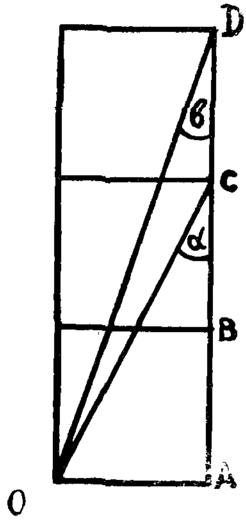
ему DF. Отрезок EF делит площадь данной фигуры на равновеликие части.

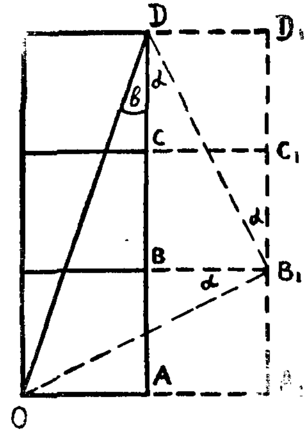
Доказательство

Площадь $CEDAC$ равна половине площади фигуры $ACEBA$ (треугольники CDA и DBA равновелики, площадь CED = площади DEB). Треугольники AGF и GED равновелики, как показано в решении первой задачи. Если от фигуры $ADEBA$, равновеликой половины фигуры $ACEBA$, отнять $\triangle\ AGF$ и добавить равновеликий ему $\triangle\ GED$, то получим из фигуры $ADEBA$ равновеликую фигуру $EFBE$; EF производит требуемое деление площади данной фигуры.

ЗАДАЧА 3

В прямоугольнике, составленном из трех квадратов, проведены диагонали OC и OD, образующие со стороною AD углы a и b. Доказать, что $a + b = 45°$.





Решение

Пристроим к данному прямоугольнику другой такой же — AA_1D_1D и проведем диагонали OB_1 и B_1D.

Угол $OB_1B = \angle DB_1D_1 = \angle ADB_1$.

Угол $OB_1D = 90^\circ$, так как он образован из прямого угла BB_1D_1 отнятием и прибавлением одного и того же угла a. $\triangle OB_1D$ прямоугольный и равнобедренный с основанием OD. Сумма углов при основании равна 90°, угол ODB_1, представляющий сумму $a+b$, равен 45°.

РАССКАЗ ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ

о том, как чертеж помогает решению задач

Основой всей математики является арифметика. В житейской практике чаще всего приходится решать арифметические задачи. Они, как мы уже видели, бывают часто трудные и нелегко поддаются чисто арифметическому решению.

На помощь решающему приходит алгебра, но практика показывает, что и составление уравнения из условия задачи для ее решения бывает часто трудно, так как это составление нельзя выполнить по какому-нибудь общему для всех задач правилу, а к каждому типу задач нужно подходить по-особому. Словом, при составлении уравнения по условию задачи каждый раз надо думать.

Часто составление уравнения и решение задачи облегчаются построением соответствующего условию задачи чертежа.

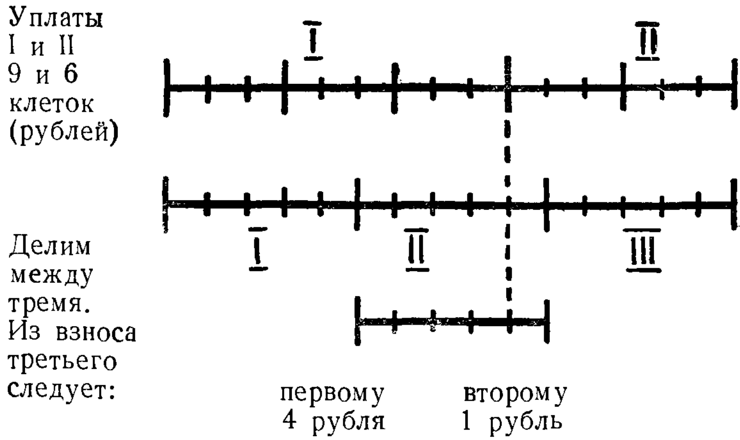
Покажем это на нескольких примерах.

1. ЗАДАЧА ОБЕДАЮЩИХ

Двое зашли в столовую. Один заказал 3 блюда другой 2. Все блюда стоят одинаково. К обедающим присоединился третий, и все трое съели поровну. Третий внес 5 рублей. Сколько из этих денег следует каждому из первых двух посетителей?

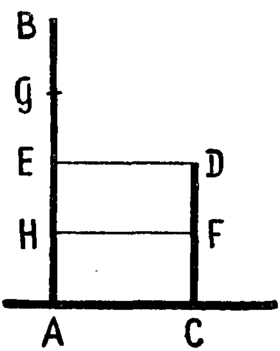
Графическое решение

Обозначим стоимость блюда тремя клетками.



2. ЗАДАЧА О БИДОНАХ МОЛОКА

Молоко находится в двух бидонах, в первом вдвое больше, чем во втором. Когда из каждого бидона отлили по 20 литров, то в первом осталось втрое больше, чем во втором. Сколько в них первоначально было молока?



Графическое решение

Пусть AB и CD изображают количество молока в бидонах; BG и равный ему отрезок DF равны 20 литрам. Отрезок GA по условию задачи равен $3FC$, $EH = DF = 20$ литрам. $GE = FC$, так как $BE = DC$ и от обоих отрезков отняли поровну.

$EA = 2\ FC$; так как $AH = FC$, то

$EH = FC = DF = 20$ литрам,

$AB = 4\ FC = 80$ л, $DC = 40$ л.

3. ЗАДАЧА О ТРЕХ МАЛЬЧИКАХ-ВЕЛОСИПЕДИСТАХ

Из места A в место B направляются три мальчика. Расстояние от A до B 36 *км*. У мальчиков есть велосипед, на котором могут усесться только двое. При такой езде велосипед двигается в 3 раза скорее, чем пеший.

Мальчики решили отправиться следующим образом. Двое едут на велосипеде, третий отправляется пешком. Велосипедист, доехав до некоторой точки C, отпускает второго мальчика, который продолжает путь пешком. Велосипедист же возвращается обратно, навстречу третьему мальчику, в некоторой точке D встречает его, усаживает на велосипед и направляется к точке назначения B.

На каком расстоянии от начальной точки A находятся точки поворота велосипеда C и D, если все три мальчика пришли к месту назначения B одновременно?

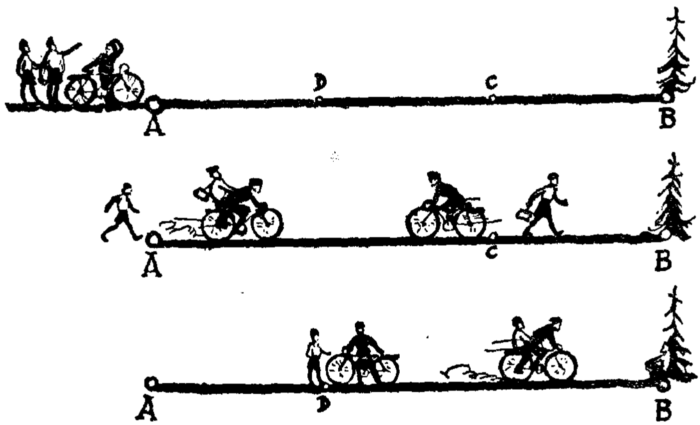
Предполагается, что велосипед имеет постоянную скорость и пешеходные скорости всех мальчиков одинаковые.

Решение

Задача решается легко, если воспользоваться чертежом.

Пусть первый мальчик правит велосипедом, следовательно, весь путь проделает на велосипеде. От точки A до C второй мальчик ехал на велосипеде и затем от точки C до B шел пешком. Третий мальчик от A до D шел пешком, а с точки D до B — на велосипеде.

Все три мальчика проделали путь в один и тот же промежуток времени.



За время, в которое второй мальчик пешком прошел путь CB, велосипед проехал путь $CD+DC+CB$. Так как велосипед движется в три раза скорее пешехода, то путь, пройденный велосипедом $CD+DC+CB$, равен тройному пути CB, то есть

$$CD+DC+CB=3CB,$$
$$CD+DC=2DC,$$
$$2DC+CB=3CB,$$
$$2DC=2CB,$$
$$DC=CB.$$

За то время, в которое третий мальчик прошел пешком путь AD, велосипед успел сделать путь $AD+$ $+DC+CD$, который по условию задачи равняется утроенному пути AD:

$$AD+DC+CD=3AD.$$

Отсюда, так же как в предыдущем рассуждении, имеем:

$$DC+CD=2DC,$$
$$AD+2DC=3AD,$$
$$2DC=2AD,$$
$$DC=AD.$$

Таким образом, получили результаты:

$$DC=CB \text{ и } DC=AD.$$

Два отрезка CB и AD, равные одному и тому же третьему отрезку DC, равны между собою; *и мы имеем:*

$$AD=DC=CB.$$

Поворотные точки движения велосипеда D и C делят весь путь AB на три равные части:

$$AD=12 \textit{ км}, \quad AC=24 \textit{ км}.$$

4. ЗАДАЧА Л. ТОЛСТОГО О КОСЦАХ

Графическое решенне

Артель косцов взялась скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня вся артель косила больший луг. После этого половина артели пошла косить меньший луг, а оставшаяся на большем лугу половина артели к вечеру докосила его. Другая половина артели косила меньший луг до вечера. На меньшем лугу осталась недокошенной часть, которую один косец скосил за день.

Сколько было в артели косцов?

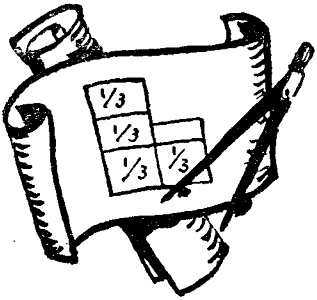
Решение

Задачу эту можно решить применением геометрических фигур, и это будет самым простым способом ее решения!

Изобразим оба луга следующей фигурой, в которой левый прямоугольник представляет больший луг, правый, в два раза меньший первого, — меньший луг.

Чтобы скосить весь больший луг, вся артель работала первую половину дня, а вторую половину дня работала половина артели. Иными словами, половине артели нужно было бы работать трижды по $\frac{1}{2}$ дня, чтобы скосить больший луг (дневную работу всех косцов считаем одинаковою). Таким образом, половина артели в половину дня скосила $\frac{1}{3}$ большего луга.

Меньший луг равен половине большего. Половина, артели за вторую половину дня скосила на нем часть равную одной трети большего луга. К вечеру недокошенной осталась $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ часть большего луга. По условию задачи этот остаток может скосить один косец за день.



Вся артель за день скосила весь больший луг и часть меньшего, равную $\frac{1}{3}$, или $\frac{2}{6}$, частям большего луга; следовательно, артель за день скосила всего

$$1+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$$

частей большего луга. Так как один косец за день может скосить $\frac{1}{6}$ часть большего луга, то для того, чтобы скосить за день $\frac{8}{6}$ частей большего луга, артель должна состоять из 8 человек.

Историю задачи о косцах сообщает А. В. Цингер по рассказам своего отца.

В Московском университете на математическом факультете учился одновременно с отцом Цингера студент Петров, чрезвычайно одаренный и оригинальный. Петров изобретал задачи, которые отличались от обычных задач учебников и затрудняли даже искусных учителей, но легко решались более способными учениками своеобразными способами. Учителя легко решали эти задачи при помощи алгебры, в то время как их можно решить проще — арифметическими или геометрическими соображениями. Среди задач Петрова была и задача о косцах, которая через отца Цингера стала известна Л. Н. Толстому. По словам А. В. Цингера, Толстой в старости восхищался арифметическим, без применения алгебры, решением задачи о косцах. Применение при решении этой задачи чертежа делает его особенно простым и ясным.

РАССКАЗ ДВАДЦАТЫЙ

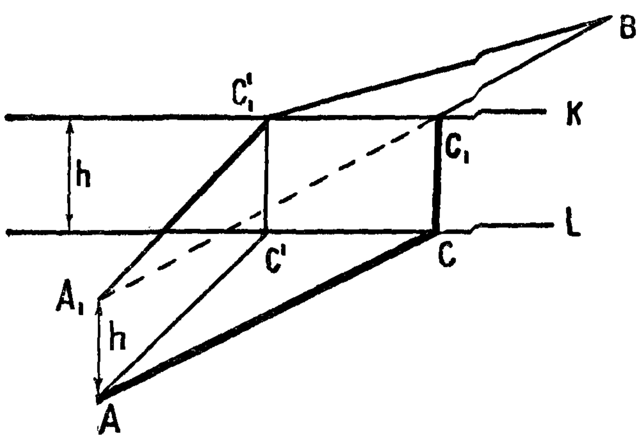
задачи о переправах

ЗАДАЧА 1

По обе стороны канала, берега которого суть параллельные прямые K и L, расположены поселки A и B. В каком месте следует устроить через канал переправу, чтобы путь между поселками был кратчайшим?

Решение

Предположим, что ломаная ACC_1B, в которой $h \perp L$ и AB прямая, представляет кратчайший путь. Так как ширина канала h постоянная, то длина ломаной ACC_1B будет наименьшей, когда сумма отрезков $AC + C_1B$ будет наименьшей. Четырехугольник ACC_1A_1 — параллелограмм, $AC = A_1C_1$, $AC + C_1B = A_1C_1 + C_1B$ и A_1B



прямая. При всяком другом положении точки C_1 сумма $A_1C_1 + C_1B$ будет ломаной и поэтому больше A_1B, то есть больше $AC + C_1B$.

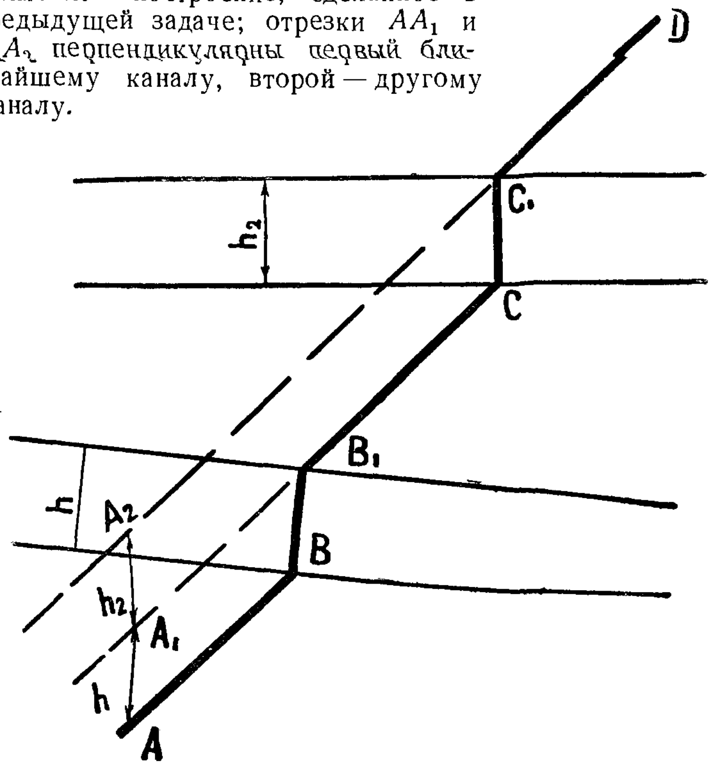
Построение. Из точки A проводим отрезок AA_1, равный h, перпендикулярно прямой L. Точку A_1 соединяем с B, получим точку C_1.

2. ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поселки A и D отделены двумя каналами, ширины которых h и h_2. Где устроить переправы через каналы, чтобы путь от A до D был кратчайшим?

Решение

Разберитесь в построении и докажите, что ломаная ABB_1CC_1D будет кратчайшим путем: нужно дважды применить построение, сделанное в предыдущей задаче; отрезки AA_1 и A_1A_2 перпендикулярны первый ближайшему каналу, второй — другому каналу.



РАССКАЗ ДВАДЦАТЬ ПЕРВЫЙ

о задачах, решение которых указывается одним словом „Смотри!“

Народы Индии дали человечеству много важных математических знаний. Из них самое важное — изобретение нуля, делающего возможным обозначение любых чисел при помощи десяти цифр (позиционная система изображения чисел). Об этом изобретении великий французский математик Лаплас (1749—1827) сказал:

„Мысль выражать все числа знаками, которые, кроме значения по форме, получают еще значение по занимаемому месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно осознать, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этому, мы видим ясно на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, для которых эта мысль осталась скрытой“.

Математики Индии не увлекались строгими доказательствами.

Часто их выводы и доказательства правил и теорем ограничивались чертежом, рядом с которым стояло единственное слово: „СМОТРИ!“

Вот несколько примеров, принадлежащих индийским авторам, и подражания им.

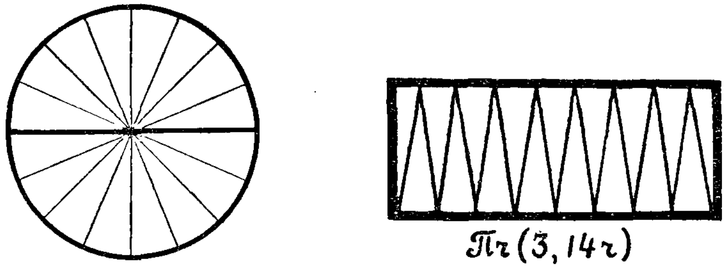
1. ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ КРУГА

Вы знаете, что площадь

F круга $= \pi r^2$ (приблизительно 3, 14 r^2).

Если использовать наши обозначения, которых в Индии не знали, то в индийском учебнике вывод формулы делается так: длина полуокружности πr

СМОТРИ!



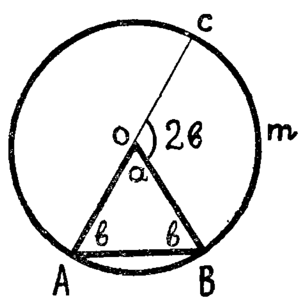
Площадь круга $= \pi rr = \pi r^2$

2. ВПИСАННЫЙ УГОЛ ИЗМЕРЯЕТСЯ ПОЛОВИНОЙ ДУГИ, НА КОТОРУЮ ОПИРАЕТСЯ

Это означает, что число градусов вписанного угла равно половине числа градусов дуги, на которую угол опирается. Центральный угол содержит столько же градусов, сколько их в дуге, на которую угол опирается.

Индийский учебник дает:

СМОТРИ!



$\angle OAB = b$ — вписанный; $\angle COB$, как внешний для равнобедренного треугольника AOB, равен $2b$.

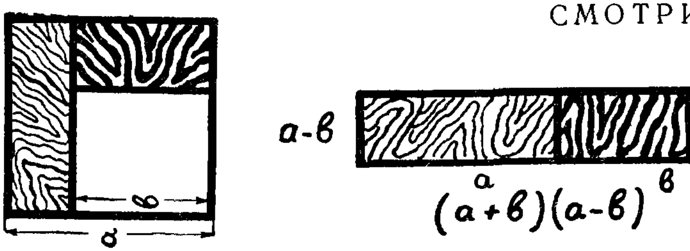
$\angle COB$ — центральный, измеряется дугой CB.

Вписанный угол b, как половина $\angle COB$, измеряется половиной дуги BC, на которую опирается.

Примечание. Если вписанный угол тупой, то его следует диаметром круга разбить на два острых вписанных угла, к которым применим данный вывод.

3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

СМОТРИ!



Площадь угольника (первый чертеж) равна $a^2 - b^2$; на втором чертеже после передвижения, указанного стрелкой, эта же площадь равна $(a + b)(a - b)$; вывод:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Следствие. Пусть дан прямоугольник со сторонами k и l. Обозначим k через $x + y$, l — через $x - y$.

Такие числа x и y всегда можно найти, решая систему уравнений:

$$x + y = k,$$
$$x - y = l.$$

Периметр прямоугольника $2k + 2l$ равен $2x + 2y + 2x - 2y = 4x$, площадь $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

Площадь прямоугольника будет наибольшей при данном периметре, когда y^2 будет иметь наименьшее значение, то есть когда $y = 0$.

В таком случае $k = x$ и $l = x$, и прямоугольник превратился в квадрат. Отсюда — важная теорема.

Из прямоугольников с равными периметрами наибольшую площадь имеет квадрат.

Примеры.

Стороны прямоугольника	периметр	площадь
12 и 8	40	96
13 и 7	40	91
11 и 9	40	99
10 и 10	40	100

Полученный результат можно выразить и такой теоремой: произведение двух сомножителей, сумма которых одна и та же, будет наибольшим при равных сомножителях.

Имеет место и такая теорема: из равновеликих прямоугольников наименьший периметр имеет квадрат.

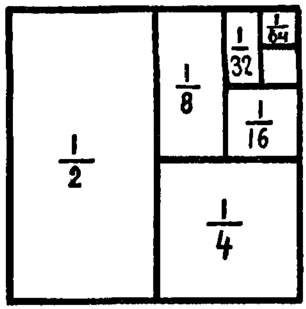
Можно доказать, что из фигур с равными периметрами наибольшую площадь имеет круг, а из равновеликих фигур круг имеет наименьший периметр.

Примечание: многие народы считали, что фигуры, имеющие равные периметры, имеют и равные площади. Сказанное выше показывает, что этот взгляд неверен.

4. СУММА СЛАГАЕМЫХ

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ (продолженных бесконечно) равна 1.

СМОТРИ!



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots=1.$$

Площадь квадрата $1\cdot 1=1$; сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ $+\ldots+\frac{1}{64}$ отличается от 1 на $\frac{1}{64}$. Продолжая деление остатков пополам, можем сделать разницу сколь угодно малой.

Шутка. Полученное равенство было рекомендовано для решения задачи: как поймать льва в Сахаре. Ясно, как: делим Сахару пополам, потом ту половину, в которой оказался лев, вновь пополам и так далее, пока лев окажется в самой малой ограде, где не составит никакого труда взять его...

5. ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО БЫСТРЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

К.Ф.Гаусс

Учитель одной начальной школы в 1786 году, рассчитывая отдохнуть, предложил классу вычислить сумму

$$1+2+3+\ldots+49+50.$$

Едва он успел усесться, как ученик Гаусс, впоследствии знаменитейший математик (1777—1855), подал свою доску со словами: „Вот она!“ (это то же „смотри!“):

$$\begin{array}{r}1+\ 2+\ 3+\ldots+49+50\\ 50+49+48+\ldots+\ 2+\ 1\\ \hline 51+51+51+\ldots+51+51\end{array}=\frac{51\cdot 50}{2}=1275.$$

Правило для n чисел:

$$\boxed{1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{(n+1)\,n}{2}}$$

Так же найдем для первых n нечетных чисел натурального ряда:

$$\begin{array}{ccccccccccc}1&+&3&+&5&+\ldots+&(2n-3)&+&(2n-1)\\ (2n-1)&+&(2n-3)&+&(2n-5)&+\ldots+&3&+&1\\ \hline 2n&+&2n&+&2n&+\ldots+&2n&+&2n\end{array}=$$

$$=\frac{2n\cdot n}{2}=n^2$$

и

$$\boxed{1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2}$$

6. НАЙТИ СУММУ

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}\ .$$

Смотри: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, ...,

$$\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

и

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-$$

$$-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}\ .$$

Общее правило:

$$\boxed{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}=\frac{n-1}{n}}$$

РАССКАЗ ДВАДЦАТЬ ВТОРОЙ

о задачах старых русских авторов

1. ЗАДАЧИ ИЗ „АРИФМЕТИКИ“ МАГНИЦКОГО

До нас дошел целый ряд математических рукописей на русском языке и XVII века.

К концу XVII века этих рукописных пособий стало явно недостаточно и появилась потребность в руководствах по математике.

В 1703 году была напечатана в Москве книга большого формата, в 612 страниц:

> АРИФМЕТИКА
>
> сиречь наука числительная. С разных диалектов на славенский язык преведеная и во едино собрана и на две книги разделена. Ныне же повелением благочестивейшего великого государя нашего царя и великого князя Петра Алексеевича всея великия и малыя и белыя России самодержца: при благороднейшем великом государе нашем царевиче и великом князе Алексие Петровиче, в богоспасаемом царствующем великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена, первое, в лето от сотворения мира 7211, от рождества же 1703, месяца Януария.

В рамке этого длинного заглавия, напечатанного в две краски и крупным шрифтом, почти незаметными мелкими буквами указано:

Сочинися сия книга чрез труды Леонтия Магницкого

Книга эта была написана по заказу Петра I Леонтием Филипповичем Магницким (1669—1739), первым учителем математики в России. Многие десятилетия она служила руководством для изучавших математику в России и имеет очень большое значение в истории математического образования в нашей стране. „Арифметика" Магницкого, вопреки своему заглавию, содержит, кроме арифметики, начала алгебры, геометрии и тригонометрии, а также применение математики к морскому делу. Она с успехом удовлетворяла потребность в математических знаниях русских людей в начале XVIII века.

В России до появления книги Магницкого были только рукописные математические книги. Лишь в 1682 году вышло в свет „Считание удобное, которым всякий человек купующий или продающий зело удобно изыскати может число всякие вещи. А како число вещей и вещам число цены изыскивати, и о том, читая в предисловии к читателю, совершенно познаешь".

Такое длинное заглавие носит таблица умножения всех чисел до 100×100. Эта таблица нашла, по-видимому, широкое распространение, так как в 1714 году она была переиздана по повелению Петра I под заглавием: „Книга считания удобного ко употреблению всякому хотящему без труда познати цену или меру какие вещи". Автора „Считания удобного" мы даже не знаем по имени, о Магницком сведения очень скудны. Портретов их тоже нет, так как фотографии в те времена не существовало, а заказывать портрет художнику эти скромные люди не были в состоянии.

Приведем несколько задач из „Арифметики" Магницкого.

Задача 1

„Некий человек продал коня за 156 рублев; раскаявшийся купец начал отдавать продавцу, говоря, что конь недостоин такой высокой цены. Продавец предложил ему иную куплю, говоря: если тебе кажется цена коню высока, то купи только гвозди, которые у коня в подковах, коня же возьми даром, а гвоздей в каждой подкове 6. За 1-й гвоздь

дай мне полушку $\left(\frac{1}{4}\text{ копейки}\right)$, за другой 2 полушки, за 3-й — копейку, а за 4-й — две копейки и т. д. за все гвозди. Купец, полагая, что все гвозди обойдутся не свыше 10 рублей, восхотел коня в дар получити и согласился на такую цену. Ведательно есть, коликим купец-он проторговался“.

Решение

Покупатель должен быть уплатить, согласно условию, за коня:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{21}\text{ копеек.}$$

$$\text{Сумма } 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{21}=2^{22}-1$$

Для решения задачи и различных вопросов этого рода полезно иметь таблицу значений степеней двойки, которую мы даем здесь.

Показатель степени	Значение
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536

17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
. . .	. . . .
64	18 446 744 073 709 551 616

Из таблицы видим, что

$$2^{22} - 1 = 4\ 194\ 303;$$

за коня надо было бы уплатить 4 194 $303\frac{3}{4}$ копейки вместо первоначально спрошенной суммы в 156 рублей. Ответ на вопрос задачи „коликим купец-он проторговался“, то есть сколько покупатель потерял бы по сравнению со спрошенной ценой, будет

$$4\ 194\ 303\frac{3}{4}\ \text{коп.} - 15\ 600\ \text{коп.} = 4\ 178\ 703\frac{3}{4}\ \text{коп.},$$

как правильно указывает Магницкий.

При помощи приведенной выше таблицы степеней двойки можно решить задачу о вознаграждении сказочного изобретателя шахматной игры, который просил положить на клетки шахматной доски 1, 2, 4, 8, 16 и так далее зерен. Очевидно, что общее число зерен будет

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1 =$$
$$= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Подсчитано, что это количество зерен составляет урожай с поля, превосходящего величиной всю сушу земного шара в 28 раз.

Задача 2

Найти число, которое при делении на 2 даст в остатке 1, при делении на 3 даст в остатке 2, при делении на 4 даст в остатке 3, при делении на 5 даст в остатке 4.

Решение

Будем находить число, которое на единицу больше искомого. Это новое число разделится без остатка на 2, на 3, на 4 и на 5, то есть будет их общим кратным. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5 есть 60, поэтому наименьшее искомое число 59.

Таких чисел можно найти сколько угодно по формуле

$$n = 60k - 1,$$

где k можно давать значение любого натурального числа.

Задача 3

„Вопросил некто некоего учителя: „Сколько имеешь учеников у себя, так как хочу отдать сына к тебе в училище“. Учитель ответил: „Если ко мне придет учеников еще столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100“.

Сколько было у учителя учеников?“

Решение

Магницкий решает задачу так называемым фальшивым правилом.

Делаем первое предположение: учеников было 24. Тогда по смыслу задачи к этому числу надо прибавить „столько, полстолько, четверть столько и 1“; имели бы:

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67,$$

то есть на $100 - 67 = 33$ меньше, чем требовалось по условию задачи; число 33 называем „первым отклонением“.

Делаем второе предположение: учеников было 32. Тогда имели бы:

$$32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89,$$

то есть на $100 - 89 = 11$ меньше; это „второе отклонение“.

На случай, если при обоих предположениях получилось меньше, дается правило: помножить первое предположение на второе отклонение, а второе предположение на первое отклонение, отнять от большего произведения меньшее и разность разделить на разность отклонений:

$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Учеников было 36.

Таким же правилом надо руководствоваться, если при обоих предположениях получилось больше, чем полагается по условию. Например:

Первое предположение: 52.

$$52 + 52 + 26 + 13 + 1 = 144.$$

Получили на $144 - 100 = 44$ больше — „первое отклонение".

Второе предположение: 40.

$$40 + 40 + 20 + 10 + 1 = 111.$$

Получили на $111 - 100 = 11$ больше — „второе отклонение".

$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Если при одном предположении получим больше, а при другом меньше, чем требуется по условию задачи, то нужно при указанных выше вычислениях брать не разности, а суммы. Например:

Первое предположение: 60.

$$60 + 60 + 30 + 15 + 1 = 166.$$

Получили на $166 - 100 = 66$ больше — „первое отклонение".

Второе предположение: 20.

$$20 + 20 + 10 + 5 + 1 = 56.$$

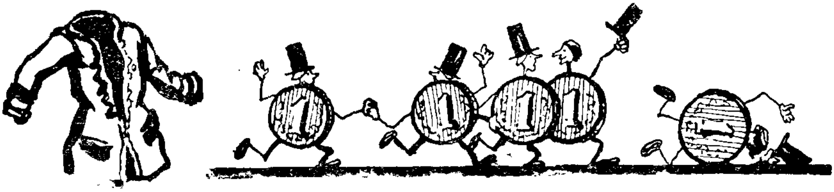
Получили на $100 - 56 = 44$ меньше — „второе отклонение";

$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

Обоснование способа решения задач фальшивым правилом, которого Магницкий не дает, читатель может найти в моей книге „Рассказы о математике" (Детиздат, 1954). Там же имеются некоторые дополнительные сведения о Магницком и его книге.

Задача 4

„Некий человек нанял работника на год, обещав ему дать 12 рублев и кафтан. Но тот по случаю, проработав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойную



плату с кафтаном. Ему дали по достоинству 5 рублей и кафтан. Какой цены был оный кафтан?"

Решение

Работник должен был получить за год работы 12 рублей и кафтан, следовательно, в месяц 1 рубль и $\frac{1}{12}$ часть стоимости кафтана, за 7 месяцев 7 рублей и $\frac{7}{12}$ стоимости кафтана. Вместо этого он получил 5 рублей и кафтан $\left(\frac{12}{12}\text{ стоимости кафтана}\right)$, то есть менее условленного на 2 рубля, которые были заменены $\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$ стоимости кафтана.

$\frac{5}{12}$ стоимости кафтана равно 2 рублям, весь кафтан стоит:

$$2:\frac{5}{12}=\frac{2\cdot 12}{5}=4\frac{4}{5}\text{ рубля.}$$

Задача 5

„Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а с женой выпьет ту же кадь в 10 дней. И ведательно есть, в колико дней жена его особно выпьет ту же кадь?"

Решение

Человек выпивает в день $\frac{1}{14}$ кади, вместе с женой $\frac{1}{10}$ кади. Жена в день выпивает $\frac{1}{10}-\frac{1}{14}=\frac{1}{35}$ кади, а всю кадь она выпивает в 35 дней.

2. ЗАДАЧА С. А. РАЧИНСКОГО

Вероятно, вы видели картину художника Н. П. Богданова-Бельского (1868—1945) „Устный счет".

На ней изображен урок устного решения задач в школе села Татево, Смоленской области, в школе, которую основал и в которой преподавал Сергей Александрович Рачинский с семидесятых годов прошлого века. На картине воспроизведен С. А. Рачинский. Художник Н. П. Богданов-Бельский был учеником этой школы.

С. А. Рачинский (1833—1902) был доктором естественных наук и профессором ботаники Московского университета, переводчиком сочинений Дарвина на русский язык и близким другом многих выдающихся людей своего времени (музыканта Листа, немецкого социалиста Лассаля, философа Куно Фишера и других). В 1868 году С. А. Рачинский оставляет должность профессора, открывает школу для крестьянских детей и становится в ней учителем. Для этого он должен был перед чиновниками духовного ведомства выдержать экзамен на звание начального учителя*.

С.А. Рачинский

Фигура каждого ученика на картине Богданова-Бельского показывает, как увлечен класс решением задач. Это является подтверждением рассказа С. А. Рачинского о том, как в его школе ученики любили уроки решения задач. „Не успел я приступить к упражнениям в умственном счете, которые до того в школе не практиковались, как к ним развилась настоящая страсть... Меня стали преследовать то одна группа учеников, то другая, то все вместе с требованием умственных задач. К этому вскоре присоединилась страсть к письменным упражнениям в счете... Разом все, человек тридцать, накидывались на меня с дощечками:

— Сергей Александрович, деленьице!

— Мне на сотни!

— Мне на единицы!

— Мне на миллионы!

— Мне на тысячи!

И решения подавались с такой быстротой, что я едва успевал писать задачи...

---

* Во время преподавания в начальной школе С. А. Рачинским написаны книги: „1001 задача для умственного счета", „Арифметические забавы", „Геометрические забавы" и другие.

Восторгу ребят не было границ, когда все деления стали выходить без остатка.

— Мне, Сергей Александрович, задачку потруднее!

— А мне деленьице, Сергей Александрович!“*

Обратите внимание на задачу, записанную на классной доске:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Тут не случайно взятые числа и механическое вычисление результата, а в задаче имеется более глубокое содержание и красота, которые пытливого ученика могут навести на дальнейшие размышления.

Подсчет показывает, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$ и $13^2 + 14^2 = 365$. Иными словами: сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел (10, 11, 12) равна сумме квадратов двух следующих за ними чисел (13, 14), и в результате вычисления получается 2. Естественно, возникает вопрос, существуют ли еще другие такие тройки последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых равнялась бы сумме квадратов двух, следующих за ними, натуральных чисел?

Этот вопрос решим так.

Допустим, что существует такая тройка чисел, что

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n + 3)^2 + (n + 4)^2.$$

Это равенство после раскрытия скобок принимает вид

$$3n^2 + 6n + 5 = 2n^2 + 14n + 25$$

или:

$$n^2 - 8n - 20 = 0.$$

Существует ли такое натуральное число n, которое удовлетворяет этому уравнению? Ответить на этот вопрос можно, не зная еще квадратных уравнений.

Разложим трехчлен $n^2 - 8n - 20$ на множители:

$$n^2 - 8n - 20 = n^2 - 10n + 2n - 20 = n\ (n - 10) +$$
$$+ 2(n - 10) = (n - 10)\ (n + 2).$$

Трехчлен $n^2 - 8n - 20$, равный $(n - 10)\ (n + 2)$, обращается в 0 тогда и только тогда, когда $n = 10$ или $n = -2$. Корнями уравнения

$$n^2 - 8n - 20 = 0$$

являются только числа 10 и -2.

---

* С. А. Рачинский. Сельская школа. Москва, 1892.

Единственная тройка **натуральных** чисел, сумма квадратов которых равна сумме квадратов двух следующих за ними натуральных чисел, есть 10, 11 и 12.

Таким же образом можем решить вопрос: существует ли такая четверка последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых равна сумме квадратов трех следующих натуральных чисел? Иными словами: существует ли такое натуральное число n, которое удовлетворяет уравнению

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 =$$
$$= (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2,$$

или:

$$n^2 - 18n - 63 = 0.$$

Трехчлен $n^2 - 18n - 63$ можно представить следующим образом:

$$n^2 - 18n - 63 = n^2 - 21n + 3n - 63 =$$
$$= n\ (n-21) + 3\ (n-21) = (n-21)\ (n+3).$$

Отсюда видно, что корнями уравнения

$$n^2 - 18n - 63 = 0$$

являются только числа 21 и -3. Единственное натуральное число, удовлетворяющее поставленному вопросу, есть 21:

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Примечание: если поставить вопрос не о нахождении последовательных натуральных, а лишь целых чисел (положительные, отрицательные, нуль), обладающих указанными в условии свойствами, то имеем еще решения, определяемые вторыми корнями уравнений:

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2,$$
$$(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2.$$

РАССКАЗ ДВАДЦАТЬ ТРЕТИЙ

о задачах, не подошедших к перечисленным группам

1. ЗАДАЧА НА ДВИЖЕНИЕ

Между городами A и B через возвышенность ходит автобус. При подъеме на возвышенность он идет со скоростью 25 *км/час*, при спуске — со скоростью 50 *км/час*. От A до B он идет $3\frac{1}{2}$ часа, от B до A — 4 часа.

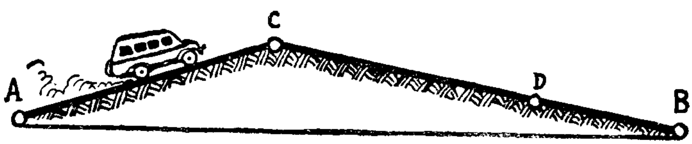
Найти арифметическим способом расстояние между городами A и B, а также расстояние до высшей точки возвышенности.

Ученик решал задачу следующим образом.

Представим схему пути между городами A и B. Точка C обозначает точку перевала.

Очевидно, расстояние CB больше AC, так как на переезд из B в A требуется больше времени, чем на переезд из A в B.

Отложим от точки C расстояние CD, равное AC. Путь $AC + CD$ при переезде из A в B и путь $DC + CA$ при переезде из B в A требуют в обоих случаях одинаковое количество времени; разница времени 4 ч. — $3\frac{1}{2}$ ч. $= \frac{1}{2}$ часа получилась оттого, что при переезде из A в B путь DB был пройден со скоростью 50 *км/час*, при переезде же из B в A — со скоростью 25 *км/час*. В первом случае для прохождения пути потребовалось



времени $\frac{DB}{50}$ часа, при обратном переезде $\frac{DB}{25}$ часа. $\frac{DB}{25}-\frac{DB}{50}=\frac{DB}{50}$ часа составляют разность потребных для прохождения расстояния DB промежутков времени в том и другом направлении. По условию задачи $\frac{DB}{50}=\frac{1}{2}$; $DB=25$ *км.*

Ученик далее рассуждал так.

На переезд из D в A остается 3 часа, так как переезд от B до D потребует 1 час времени.

Путь DC проходится со скоростью 25 *км/час*, равный ему путь CA — со скоростью 50 *км/час.*

Средняя скорость движения $\frac{50+25}{2}$ *км* $=37\frac{1}{2}$ *км/час.*

За 3 часа автобус со средней скоростью $37\frac{1}{2}$ *км/час* пройдет $112\frac{1}{2}$ *км.* Расстояние между A и B $112\frac{1}{2}$ *км* $+$ $+\ 25$ *км* $=137\frac{1}{2}$ *км.* Так как $AC=CD$, то $AC=$ $=112\frac{1}{2}$ *км* $:2=56\frac{1}{4}$ *км*, $CB=81\frac{1}{4}$ *км.*

Проверка решения привела ученика в смущение.

Если $AC=56\frac{1}{4}$ *км*, то прохождение этого пути (из A и B) со скоростью 25 *км/час* требует больше 2 часов. Переезд из C в B со скоростью 50 *км/час* требует более $1\frac{1}{2}$ часа, так как $CB=81\frac{1}{4}$ *км.* Вопреки условию, переезд из A в B требует более $3\frac{1}{2}$ часа.

Ученик проверил решение при помощи уравнений. Обозначив AC через x, CB через y, имеем:

$$\frac{x}{25}+\frac{y}{50}=\frac{7}{2}$$

$$\frac{y}{25}+\frac{x}{50}=4$$

или:

$$2x+y=175$$
$$2y+x=200$$

откуда

$$x=50$$
$$y=75$$

Проверка по условию подтверждает правильность этого ответа.

В чем заключалась ошибка ученика при первом способе решения?

В *неправильном толковании понятия „средняя скорость"*.

Средняя скорость выражается числом, которое получено от деления пройденного пути на время, употребленное для прохождения этого пути.

Автобус, поднимаясь в гору, проходит в час 25 *км*. В нашей задаче пути AC (в гору) и CD (с горы) были одинаковые, но скорость при спуске с горы (на пути CA) в два раза больше. За час подъема в гору было пройдено 25 *км*, при спуске с горы 25 *км* были пройдены в $\frac{1}{2}$ часа; автобус сделал 50 *км* в $1\frac{1}{2}$ часа; следовательно, его средняя скорость при этом была $50 : \frac{3}{2} = \frac{100}{3}$ *км/час*.

За 3 часа такого движения автобус прошел $\frac{100}{3} \cdot 3 = 100$ *км*, что дает расстояние $DC + CA$. Так как эти расстояния равны, то $AC = 50$ *км*, $CD + DB = 50$ *км* $+ 25$ *км* $= 75$ *км*.

2. ЗАДАЧА О ДЕЛЕЖЕ ЯБЛОК

Мама поделила между тремя своими сыновьями яблоки. Первому она дала половину всех яблок и половину яблока; второму — половину остатка и половину яблока, третьему — половину нового остатка и половину яблока. Ни одного яблока при этом разрезать не приходилось. Сколько яблок получил каждый из сыновей?

Решение

Первоначальное число яблок и оба остатка при дележе яблок должны быть нечетными числами, иначе при прибавлении к каждой из половин этих чисел половины (яблока) не получились бы у всех сыновей целые числа яблок (по условию задачи разрезать яблок не приходилось). Половина второго остатка и $\frac{1}{2}$ яблока (доля третьего сына) могли составить только одно яблоко; это и был второй остаток. Если бы второй остаток был 3, 5 или какое-нибудь другое нечетное число, отличное от 1, то половина этого остатка была бы $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ и т. д. яблок. Одну половину да еще $\frac{1}{2}$ яблока получил бы третий сын, и у матери осталось бы 1 или 2 или более целых яблок, что противоречит условию задачи. Итак, второй остаток составляло одно яблоко. Половина его да еще $\frac{1}{2}$ яблока составляют 1 яблоко, которое и получил третий сын.

Второй остаток — 1 яблоко — получился после отдачи второму сыну $\frac{1}{2}$ яблока из половины первого остатка; значит, первый остаток составлял 3 яблока и второй сын получил половину от 3 яблок $+\frac{1}{2}$ яблока, то есть 2 яблока.

Первый остаток — 3 яблока — получился из половины первоначального количества яблок, из которой первому сыну к половине первоначального числа была добавлена $\frac{1}{2}$ яблока, то есть половина первоначального количества яблок было $3\frac{1}{2}$, а первоначальное число яблок 7. Итак, у матери было 7 яблок. Она дала первому сыну половину этого числа яблок и $\frac{1}{2}$ яблока, то есть $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$ яблока, и у нее осталось $7-4=3$ яблока (первый остаток). Второй сын получил половину этого остатка и $\frac{1}{2}$ яблока, то есть $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ яблока, и у матери осталось $3-2=1$ яблоко (второй остаток). Третий сын получил половину этого остатка и $\frac{1}{2}$ яблока, то есть $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ яблоко. Доли сыновей составляют $4+2+1=7$ яблок, то есть все яблоки, имеющиеся у матери. В согласии с условием задачи при дележе яблоки разрезать не понадобилось.

3. ЗАДАЧА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЛА ПРИ ПЕРЕНОСЕ ЕГО ПОСЛЕДНЕЙ ЦИФРЫ НА ПЕРВОЕ МЕСТО

Последняя цифра некоторого числа 7. Эту цифру переставили на первое место слева, впереди остальных цифр, отчего получилось число в 7 раз большее. Найти первоначальное число.

Решение

В числе, получающемся после перестановки цифры, первая цифра будет 7 и последняя 9, так как от умножения на 7 первоначального числа, оканчивающегося на 7, получится последняя цифра для нового числа 9, которая одновременно есть цифра десятков первоначального числа.

Итак, первоначальное число имеет последние две цифры 97. Новое число получается от умножения цифр первоначального числа по порядку, идя справа, на 7, причем умножение надо продолжать до тех пор, пока в произведении получается точно 7 единиц высшего разряда. Имеем: последние справа две цифры первоначального числа 97, последняя цифра нового числа 9. Умножаем на 7 цифры первоначального числа $7 \cdot 7 = 49$; 9 — вторая справа цифра первоначального числа, 4 запоминаем: $7 \cdot 9 = 63$; $63 + 4 = 67$; 7 — третья цифра, 6 запоминаем; $7 \cdot 7 = 49$; $49 + 6 = 55$; 5 — четвертая цифра, и так далее.

Каждая цифра первоначального числа, получаемая при таком умножении и стоящая на n-м справа месте в этом числе, будет цифрою нового (полученного после перестановки последней цифры вперед) числа, стоящею на $n-1$-м справа месте его. Так, вторая цифра первоначального числа 9 будет первой справа цифрой нового числа, третья цифра первоначального числа 7 будет второй цифрой нового числа, четвертая цифра первоначального числа 5 — третьей цифрой нового числа и так далее. В результате получаем числа: 1014492753 623188405797 — первоначальное число; 710144927536231 8840579 — новое число.

Можно найти искомое число делением на 7 второго числа, зная, что у него первая цифра 7, последняя 9 и что первая слева цифра частного есть вторая цифра слева для делимого.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы решили с полсотни задач.

Ко многим из них обычные приемы решения, которые излагаются в учебниках, как будто неприменимы. Однако мы их решили и убедились, что для этого не были нужны знания, выходящие за пределы школьной программы. Достаточно было знать школьную программу до шестого — седьмого классов и несколько подумать.

М. Горький когда-то обратился к ребятам с вопросом: какие книги они хотели бы иметь?

Из нескольких тысяч ответов Горькому особенно понравился ответ тринадцатилетней девочки:

„Мы хотим книжек... не вроде описания, а в случаях..."

Очевидно, книга должна рассказывать о том, что можно делать, и показывать, как практически то или другое надо делать.

В отношении к задачам это требование означает, что надо показать, как та или другая задача решается. Мы в нашей книге и старались удовлетворять этому требованию, мы показывали на примерах — „на случаях", — как вдумчивое использование самых начальных сведений по математике позволяет решать задачи, которые на первый взгляд могут казаться недоступными.

Для успешного приобретеиия способности решать задачи, как и для усвоения любых знаний, нужно еще и еще повторять тот совет, который лет тридцать пять назад дал советскому юношеству на страницах журнала „Костёр“ академик Алексей Николаевич Крылов (1863 — 1945). Совет этого крупного ученого и величайшего мастера применения знаний на практике должен быть в памяти у каждого школьника.

А. Н. Крылов писал:

„Всему учись сам. Никогда не рассчитывай, что можно овладеть знаниями без работы. Старайся не просто запоминать изучаемое, а старайся понять сущность дела. То, что понято, легко запоминается и долго не забывается.

Накапливай опыт... Будь стоек, не бойся разочарований, не бросай начатого дела. Работай упорно и регулярно изо дня в день“.

Следуйте этому совету. Усвоив содержание нашей книги, беритесь за другие, в которых речь идет о более сложных задачах. Но не теряйте интереса к арифметике, которой мы в этой книге много занимались. Арифметика — основа всех других разделов математики, она и в жизни находит наиболее частые применения. Не забывайте мнения вашего друга Димки-Невидимки:

Чтоб водить корабли,
Чтобы в небо взлететь,
Надо многое знать,
Надо много уметь.
И при этом, и при этом,
Вы заметь-те-ка,
Важная наука —
Арифме-ти-ка.

Почему корабли
Не садятся на мель,
А по курсу идут
Сквозь туман и метель?
Потому что, потому что,
Вы заметь-те-ка,
Капитанам помогает
Арифме-ти-ка.

Чтоб врачом, моряком
Или летчиком стать,
Надо прежде всего
Арифметику знать.
А на свете нет профессий,
Вы заметь-те-ка,
Где бы нам не пригодилась
Арифме-ти-ка.

Если вы, молодой читатель, кое-что из этой маленькой книги записали себе на приход, то этим оправдано для вас чтение и для автора писание ее.

ОГЛАВЛЕНИЕ